Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

---

70. Национална Олимпиада по математика

Условия, кратки решения и критерии за оценяване, първи ден

Задача 1. Град има 4 хоризонтални и $n \geq 3$ вертикални булеварда, които се пресичат в $4n$ кръстовища. Кръстовищата разделят всеки хоризонтален булевард на $n-1$ улици, а всеки вертикален булевард на 3 улици. За да не се объркват жителите на града, кметът затворил минимален възможен брой кръстовища така, че в града да няма затворен маршрут (това означава, че тръгвайки от коя да е улица и минавайки само през отворени кръстовища без да се връщаме назад не можем да се върнем на същата улица).
а) Да се докаже, че са затворени точно n кръстовища.
б) Да се докаже, че ако от всяка улица може да се стигне до всяка друга и никое от четирите ъглови къстовища не е затворено, то са затворени точно 3 крайни кръстовища (кръстовище е крайно, ако се намира на първия или четвъртия хоризонтален булевард, или на първия или n-ия вертикален булевард).

Решение. а) Ще докажем с индукция по n, че е необходимо да се затворят поне n кръстовища. При $n = 3$ директно се проверява, че са ни нужни точно 3 затворени кръстовища. При $n > 3$ да разгледаме най-левия вертикален булевард. Ако на него има затворено кръстовище, твърдението следва от индукционното допускане. Ако на него няма затворено кръстовище, то на съседния му вертикален булевард трябва да има поне две затворени кръстовище (тъй като имаме два независими цикъл – долното и горното квадратчета). Отново твърдението следва от индукционното допускане. Ако всяко кръстовище обозначим с номера на вертикалния булевард (отляво надясно) и номера на хоризонталния булевард (отдолу нагоре), можем да затворим следните n кръстовища: $(a, 2)$ при a нечетно и $(b, 3)$ при b четно. Лесно се проверява, че няма цикъл.
б) Да разгледаме улиците като ребра на граф, а кръстовищата като негови върхове. Преди затваряне на кръстовища имаме $4(n-1)+3(n-1) = 7n-4$ улици (ребра) и $4n$ кръстовища (върхове). При затваряне на вътрешно кръстовище ребрата на графа не се променят, а се добавят 3 нови върха. При затваряне на крайно кръстовище, което не е ъглово, ребрата на графа не се променят, а се добавят 2 нови върха. Нека са затворени x вътрешни и y крайни кръстовища (които не са ъглови), като тогава $x + y = n$.

Тъй като след затваряне на кръстовищата се получава свързан граф без цикли, т.е. дърво имаме, че броят на ребрата е с 1 по-малък от броя на върховете. Следователно $7n-4=4n+3x+2y-1 \iff 3x+2y=3n-3$. Тъй като $x+y=n$, получаваме $x=n-3$ и $y=3$.
Забележка: Директно се вижда, че като използваме примера от а) и променим затвореното кръстовище $(2,3)$ с $(2,4)$ ще получим свързан граф.

Оценяване. (7 точки) а) 2 т. за доказване, че са нужни поне n затворени кръстовища и 1 т. за пример; б) 1 т. за твърдението, че след затварянето трябва да се получи дърво; 1 т. за преброяване на ребрата на това дърво; 1 т. за преброяване на листата, като функция на x и y; 1 т. за довършване.

Задача 2. Върху височината през върха C на остроъгълен триъгълник ABC с център на описаната окръжност O е избрана точка T, за която $\sphericalangle TBA = \sphericalangle ACB$. Ако правата CO пресича страната AB в точка K, да се докаже, че симетралата на AB, височината през върха A в $\triangle ABC$ и отсечката KT се пресичат в една точка.

Решение. Ако $OM \cap KT = P$, то $\sphericalangle PAM = \sphericalangle PBM$. Имаме

$$\frac{PM}{TH} = \frac{KM}{KH} = \frac{OM}{CH},$$

откъдето $PM = \dfrac{OM.TH}{CH}$. Тъй като $TH = HB \operatorname{tg} \gamma$, то

$$\frac{PM}{BM} = \frac{OM}{BM}.\frac{TH}{CH} = \frac{OM}{BM}.\frac{HB}{CH}\operatorname{tg} \gamma.$$

Но от $\triangle OMB$ имаме $\dfrac{OM}{BM} = \operatorname{cotg} \gamma$ и следователно

$$\frac{PM}{BM} = \operatorname{cotg} \gamma \frac{HB}{CH}\operatorname{tg} \gamma = \frac{HB}{CH}.$$

От горното следва, че $\triangle PMB \sim \triangle BHC$, откъдето $\sphericalangle PBM = \sphericalangle BCH$. Следователно $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBM = \sphericalangle BCH$ и значи $AP \perp BC$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за $PM = \dfrac{OM.TH}{CH}$; 3 т. за $\dfrac{PM}{BM} = \dfrac{HB}{CH}$; 1 т. за $\triangle PMB \sim \triangle BHC$; 1 т. за довършване на решението.

Задача 3. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такива, че

$$f(x)f(y + f(x)) = f(xy + 1) \quad \forall x, y > 0.$$

Решение. (1) Очевидно функциите $f = 1$ и $f(x) = 1/x$ изпълняват даденото равенство. Ще докажем, че други няма.
(2) Първо да отбележим, че ако $y = \frac{f(x)-1}{x-1} > 0$ за някое $x \neq 1$, то $y + f(x) = xy + 1$ и тогава $f(x) = 1$ – противоречие.
(3) Ако $f(z) = 1/z$ за всяко $z > 1$, от условието при $y > 1$ следва, че $f(x) = 1/x$ за всяко $x > 0$.
(4) Нека сега $f(x) \neq 1/x$ за някое $x > 1$. Тогава $x = xy + 1$ при $y = 1 - 1/x > 0$ и значи $f(a) = 1$ за $a = 1 - 1/x + f(x)$. Тогава $f(z + 1) = f(a)f(z + f(a)) = f(az + 1)$ и по индукция следва, че $(*)$ $f(z + 1) = f(a^n z + 1)$ за всеки $z > 0$ и $n \in \mathbb{Z}$.
(5) Нека $u, v > 1$. Понеже $a \neq 1$, можем да изберем $n \in \mathbb{Z}$ така, че $b_n = a^n(u-1) > v(1-f(v))$, т.е. $c_n = \frac{b_n}{v} + f(v) > 1$. Тогава $f(c_n) \leq 1$ съгласно (2) и значи

$$f(v) \geq f(v)f(c_n) = f(b_n + 1) = f(u).$$

съгласно $(*)$. Аналогично $f(u) \geq f(v)$, т.е. $f(x)$ е константа при $x > 1$.
(6) Сега от условието при $y > 1$ следва, че $f(x) = 1$ при $x > 0$.

Оценяване. (7 точки) По 1 т. за (1) и (2), по 2 т. за (4) и (5), и 1 т. за (3) и (6).

Задачите са предложени от:
зад. 1 – Емил Колев, зад. 2 – Кристиян Василев, зад. 3 – Николай Николов

Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

70. Национална Олимпиада по математика

Условия, кратки решения и критерии за оценяване, втори ден

Задача 4. Дадени са две безкрайни аритметични прогресии от естествени числа

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots \text{ и } b_1 < b_2 < b_3 < \cdots$$

Известно е, че съществуват безбройно много двойки естествени числа (i, j), за които $i \leq j \leq i + 2021$ и a_i дели b_j. Да се докаже, че за всяко естествено число i съществува естествено число j, за което a_i дели b_j.

Решение. Ясно е, че съществува фиксирано число k за което a_i дели b_{i+k} за безбройно много стойности на i. Ако d_a дели d_b са разликите на двете прогресии, то:

$$a_i - a_1 = (i-1)d_a \text{ е } b_{i+k} - b_1 - kd_b = (i-1)d_b,$$

откъдето получаваме:

$$\frac{a_i - a_1}{b_{i+k} - b_1 - kd_b} = \frac{d_a}{d_b}.$$

Записваме последното равенство във вида:

$$a_i d_b - b_{i+k} d_a = a_1 d_b - d_a(b_1 + kd_b). \tag{1}$$

Лявата част на горното равенство се дели на a_i, което означава, че дясната част също се дели на a_i. Следователно за безбройно много i числото a_i дели константата

$$a_1 d_b - d_a(b_1 + kd_b).$$

Тъй като a_i става произволно голямо, това е възможно само при $a_1 d_b - d_a(b_1 + kd_b) = 0$. От (1) получаваме $a_i d_b = b_{i+k} d_a$ и понеже $a_i b_{i+k}$, то d_a дели d_b, т.е. $d_b = l.d_a$. Имаме:

$$a_1 d_b - d_a(b_1 + kd_b) = 0 \iff l.a_1 = b_1 + kld_a,$$

откъдето $b_1 = sl$ и следователно $a_1 = s + kd_a$. За всяко i (като използваме, че $b_1 = sl$ и $d_b = ld_a$) имаме:

$$a_i = a_1 + (i-1)d_a = s + (k+i-1)d_a \text{ и } b_{i+k} = b_1 + (i-k+1)d_b = la_i.$$

Следователно a_i дели b_{i+k} за всяко i.

Оценяване. (7 точки) 4 т. за $a_i d_b = b_{i+k} d_a$; 1 т. $d_b = ld_a$; 1 т. за l дели b_1; 1 т. за довършване.

Задача 5. Съществува ли множество S от 100 точки в равнината със следното свойство: центърът на тежестта на всеки 10 точки от S е точка от S?

Забележка. За множество от точки $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ центърът на тежестта е такава точка M, за която

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \overrightarrow{MA_{10}} = \overrightarrow{0}.$$

Решение. Да допуснем, че такова множество съществува. Разглеждаме координатна система в която x-координатите на всички точки са различни (достатъчно е да изберем оста x да не е перпендикулярна на всяка права, минаваща през две от дадените точки). Да подредим абсцисите на всички точки от S по големина $x_1 < x_2 < \ldots < x_{100}$. Да разгледаме x-координаните g_i на центровете на тежестта на следните 101 множества:

$$A_1 = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}, A_2 = \{1, 2, \ldots, 9, 11\}, A_{91} = \{1, 2, \ldots, 9, 100\}, \ldots,$$

$$A_{92} = \{1, 2, \ldots, 8, 10, 100\}, A_{93} = \{1, 2, \ldots, 8, 11, 100\}, \ldots, A_{101} = \{1, 2, \ldots, 8, 19, 100\}$$

Очевидно $g_1 < g_2 < \ldots < g_{101}$, и тъй като $|S| = 100$ не е възможно всички точки да принадлежат на S, противоречие.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за разглеждане на координатна система, в която всички точки са с различни абсциси; 4 т. за конструиране на 101 множества с различни центрове на тежестта; 2 т. за довършване.

Задача 6. Точка S е средата на дъгата ACB от описаната окръжност k около $\triangle ABC$ $(AC > BC)$. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Правата SI пресича окръжността k за втори път в точка T. Нека D е симетричната точка на I спрямо точката T, а M е средата на страната AB. Правата IM пресича правата през D, успоредна на AB, в точка E. Да се докаже, че $AE = BD$.

Решение. Имаме $\sphericalangle ATI = \sphericalangle ATS = \sphericalangle BTS = \sphericalangle BTI$ и $\sphericalangle AIB = 90 + \frac{\gamma}{2}$. Тъй като

$$\sphericalangle TAI + \sphericalangle TIA = 90 + \frac{\gamma}{2},$$

то $\sphericalangle TAI = \sphericalangle TIB$ и следователно $\triangle AIT \sim \triangle BIT$. Получаваме $DT^2 = IT^2 = AT.BT$, откъдето следва, че $\triangle ATD \sim \triangle DTB$. Пресмятаме

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADI = 180^\circ - AIB,$$

т.е. $ADBI$ е вписан четириъгълник. Понеже $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AT}{TD} = \dfrac{AT}{TI} = \dfrac{AI}{BI}$, то $ADBI$ е хармоничен четириъгълник. Следователно ID е симедиана в $\triangle ABI$, т.е. $\sphericalangle AIM = \sphericalangle DIB$. Ако L е пресечната точка на правата IM с описаната около четириъгълника $ADBI$ окръжност, то $AL = BD$ и понеже $ALDB$ е вписан, то DL е успоредна на AB. Следователно L съвпада с E и твърдението е доказано.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за подобието $\triangle AIT \sim \triangle BIT$; 1 т. за подобието $\triangle ATD \sim \triangle DTB$; 1 т. за $ADBI$ е вписан четириъгълник; 2 т. за $ADBI$ е хармоничен четириъгълник; 1 т. за ID симедиана; 1 т. за довършване.

Задачите са предложени от:
зад. 1 – Александър Иванов, зад. 2 – Павел Кожевников, зад. 3 – Кристиян Василев