



РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО,
МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ – 29 МАЙ 2009 г.

ТЕМА ЗА 8 КЛАС

Задача 1. Диагоналите AC и BD на вписания четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точката P , а точката M е средата на страната AB . Известно е, че правите PM и CD са перпендикулярни и че центърът на окръжността, описана около четириъгълника, не лежи върху правата PM . Да се докаже, че диагоналите на четириъгълника $ABCD$ са перпендикулярни.

Задача 2. Да се докаже, че за всеки три положителни числа a, b, c е вярно неравенството

$$\frac{a}{(3a+b+c)^2+9} + \frac{b}{(3b+c+a)^2+9} + \frac{c}{(3c+a+b)^2+9} \leq \frac{1}{10}.$$

Кога се достига равенство?

Задача 3. Едно естествено число ще наричаме „11-устойчиво”, ако не е кратно на 11 и ако след смяната на коя да е една негова цифра с която и да е от цифрите от 0 до 9 се получава число, което също не е кратно на 11. Началната цифра не може да се заменя с 0. Да се намерят всички естествени числа с 2009 цифри, които са „11-устойчиви”.

Решения

Задача 1. Нека $\angle BAC = \alpha$ и правите PM и CD се пресичат в точката N . Очевидно $\angle BDC = \alpha$, $\angle DPN = \angle MPB = 90^\circ - \alpha$ (1т). Нека симетралата на отсечката AB пресича правата AP в точката E . Ако допуснем, че точките P и E съвпадат, ще получим, че центърът на окръжността, описана около четириъгълника, лежи върху правата PM - противоречие. Знаем, че $\angle PAB = \alpha$, а $\angle MPB = 90^\circ - \alpha$. Триъгълникът ABE е равнобедрен, откъдето $\angle MEB = 90^\circ - \alpha = \angle MPB$ (3т). Следователно около четириъгълника $PMBE$ може да се опише окръжност с диаметър BE (2т), защото $\angle EMB$ е прав, а оттам и $\angle PBE$ е прав, тоест диагоналите на $ABCD$ са перпендикулярни (1т).

Задача 2. Ще използваме, че за всяко положително число x е вярно неравенството $\frac{1}{x^2 + 9} \leq \frac{1}{6x}$ (1т), като равенство се достига при $x = 3$, както и $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (1т), като равенство се достига при $x = 1$. Оттук получаваме

$$\frac{a}{(3a+b+c)^2+9} \leq \frac{a}{6(3a+b+c)}, \quad \frac{b}{(3b+a+c)^2+9} \leq \frac{b}{6(3b+a+c)} \text{ и}$$

$$\frac{c}{(3c+b+a)^2+9} \leq \frac{c}{6(3c+b+a)} \text{ (1т). Нека положим}$$

$$3a+b+c = x, 3b+c+a = y, 3c+b+a = z, \text{ тогава}$$

$$10a = 4x - y - z, 10b = 4y - x - z, 10c = 4z - x - y \text{ (1т). Така получаваме:}$$

$$\begin{aligned} & \frac{a}{(3a+b+c)^2+9} + \frac{b}{(3b+c+a)^2+9} + \frac{c}{(3c+a+b)^2+9} \leq \\ & \leq \frac{a}{6(3a+b+c)} + \frac{b}{6(3b+a+c)} + \frac{c}{6(3c+b+a)} \leq \\ & \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} \left(\frac{4x-y-z}{x} + \frac{4y-x-z}{y} + \frac{4z-x-y}{z} \right) \leq \quad (2т) \\ & \leq \frac{1}{60} \left(12 - \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) - \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) - \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{60} (12 - 2 - 2 - 2) \leq \frac{6}{60} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Равенство се достига когато има равенство навсякъде или при $a = b = c = \frac{3}{5}$ (1т).

Задача 3. Нека числото $P = \overline{a_1 a_2 \dots a_{2009}}$ е „11-устойчиво” и нека $S = S_1 - S_2$, където

$S_1 = a_1 + a_3 + \dots + a_{2009}$ е сумата от цифрите на нечетни позиции в P , а

$S_2 = a_2 + a_4 + \dots + a_{2008}$ е сумата от цифрите на четни позиции в P . Да разгледаме

произволна цифра a_{2i} , стояща на четно място в P . Тогава никое от числата

$S + a_{2i}; S + a_{2i} - 1; S + a_{2i} - 2; \dots; S + a_{2i} - 9$ няма да се дели на 11, защото ако $S + a_{2i} - j$ се дели на 11, то замената на цифрата a_{2i} с цифрата j в числото P ще ни доведе до

число, което се дели на 11, тоест P няма да е „11-устойчиво”. Но числата

$S + a_{2i}; S + a_{2i} - 1; S + a_{2i} - 2; \dots; S + a_{2i} - 9$ са десет поредни цели числа и щом никое от тях не се дели на 11, то на 11 се дели числото $S + a_{2i} + 1$ (1т). Оттук следва, че всички

цифри, стоящи на четни позиции в P дават един и същ остатък при деление на 11, а това означава, че те са равни (1т). Същото разсъждение можем да приложим и за

цифрите на P , стоящи на нечетни позиции, освен първата (защото при първата цифра има замяна с нула, която е забранена). Следователно, ако съществуват „11-устойчиви”

числа с 2009 цифри, то те трябва да имат вида $\overline{a_1 a_2 a_3 a_2 a_3 \dots a_2 a_3}$ (1т). Разбира се, в този запис цифрите a_1, a_2, a_3 не са обезателно различни. Нека сега P_1 е „11-устойчиво” число с повече от 22 цифри. Тогава числото P_1^* , получено от P_1 след премахването на последните 22 цифри, също е „11-устойчиво”. Това е така, защото ако замяната на някоя цифра в P_1^* го прави кратно на 11, същата замяна ще направи кратно на 11 и P_1 , а това е невъзможно - P_1 е „11-устойчиво”. Обяснението на този факт се крие в обстоятелството, че сумите, които проверяваме за кратност на 11 при числата P_1 и P_1^* , се различават точно с $11(a_2 - a_3)$, а това е число, кратно на 11 (1т). И понеже 2009 дава остатък 7 при деление на 22, за да решим докрай задачата, е достатъчно да намерим седемцифрените „11-устойчиви” числа. Всяко такова число трябва да има вида $\overline{a_1 a_2 a_3 a_2 a_3 a_2 a_3}$, където a_1, a_2 и a_3 са произволни цифри и $a_1 \neq 0$. Нека $S = a_1 + a_3 + a_3 + a_3 - a_2 - a_2 - a_2 = a_1 + 3a_3 - 3a_2$. Съгласно доказаното по-горе, за да не може замяната на някоя от цифрите a_2 с произволна цифра да доведе до получаването на кратно на 11 число, е необходимо и достатъчно числото $S + a_2 + 1 = a_1 - 2a_2 + 3a_3 + 1$ да се дели на 11. За да не може замяната на някоя от цифрите a_3 да доведе до получаването на кратно на 11 число, е необходимо и достатъчно никое от числата $S - a_3, S - a_3 + 1, \dots, S - a_3 + 9$ да не се дели на 11, а това означава, че числото $S - a_3 - 1 = a_1 + 2a_3 - 3a_2 - 1$ да се дели на 11. За да не може замяната на цифрата a_1 с някоя от цифрите 1; 2; ..., 9 да доведе до число, кратно на 11, е необходимо и достатъчно никое от числата $1 + 3a_3 - 3a_2; 2 + 3a_3 - 3a_2; \dots; 9 + 3a_3 - 3a_2$ да не се дели на 11, а това ще е изпълнено точно тогава, когато едно от числата $3a_3 - 3a_2$ или $3a_3 - 3a_2 - 1$ се дели на 3. И така, цифрите a_1, a_2, a_3 трябва да са такива, че числата $a_1 - 2a_2 + 3a_3 + 1; a_1 + 2a_3 - 3a_2 - 1; 3a_3 - 3a_2$ са едновременно кратни на 11 или числата $a_1 - 2a_2 + 3a_3 + 1; a_1 + 2a_3 - 3a_2 - 1; 3a_3 - 3a_2 - 1$ са кратни на 11 (1т). И в двата случая обаче, щом първите две числа са кратни на 11, то и тяхната разлика $a_2 + a_3 + 2$ трябва да е кратна на 11, а това е възможно само когато $a_2 + a_3 = 9$. Като разгледаме възможностите за a_2 и a_3 , виждаме, че тогава $3a_3 - 3a_2$ никога няма да се дели на 11, а $3a_3 - 3a_2 - 1$ ще се дели на 11 само при $a_3 = 1$ и $a_2 = 8$ (1т). Тогава за a_1 остава единствената възможност $a_1 = 1$. Оттук получаваме, че единственото „11-устойчиво” седемцифрено число е 1818181. Следователно отговорът на задачата е, че единственото „11-устойчиво” число с 2009 цифри е числото $\underbrace{181818\dots 181}_{2009}$ (1т).