

Министерство на образованието,
младежта и науката

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 12 март 2011 г.

Тема за 11. клас

Задача 1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението

$$3^{\cos x} + 3^{1-\cos x} = a$$

има точно едно решение в интервала $[0, \pi]$.

Задача 2. Точките O и I са съответно център на описаната и вписаната окръжност за триъгълник ABC . Тъглополовящата на ъгъл ACB пресича описаната около триъгълника окръжност в точка D . Ако r е радиусът на вписаната окръжност, $OI = r$ и $ID = 2r$, да се намери $\sin \angle ACB$.

Задача 3. Дадени са естествени числа $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$. Да се докаже, че твърдението:

За всяко естествено число n произведението $\binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \dots \binom{n}{a_{2011}}$ се дели на n , е вярно тогава и само тогава, когато най-големия общ делител на числата $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$ е равен на 1.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието,
младежта и науката

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 13 март 2011 г.

Тема за 11. клас

Задача 4. Колко най-малко подмножества с три елемента на множеството $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ трябва да се изберат така, че всеки два елемента на A да са едновременно елементи на поне едно от избраните множества?

Задача 5. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такива, че за произволни x, y, z , е изпълнено неравенството

$$(f(x) + f(y) - 2f(xy)) \cdot (f(x) + f(z) - 2f(xz)) \geq 0.$$

Задача 6. Дадено е естествено число a . Да се докаже, че множеството от простите делители на редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, за която $x_n = n^{2^{2011}} - a^2$, е безкрайно.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.