

6. КЛАС

6.1. В един паркинг броят на червените коли е 25% от всички коли. В продължение на един час от паркинга излизат и влизат някои коли, като в края на часа се оказало, че броят на паркираните коли се е увеличил с 3, а червените коли представляват 12% от всички паркирани коли. Какъв най-малък брой коли са били паркирани първоначално и колко от тях са били червени?

Решение. Да означим с n търсеният брой коли. (1 т.) Понеже 25% или иначе казано $\frac{1}{4}$ са били червени, то числото n е кратно на 4. (3 т.) От представянето $\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$ следва, че числото $n+3$ се дели на 25. (3 т.) Търсим сега число, кратно на 25, такова, че ако извадим от него 3 да се получи число, кратно на 4. (1 т.) Измежду естествените числа кратни на 25: 25, 50, 75, 100, ... най-малкото с исканото свойство е 75. За него разликата $75 - 3 = 72$ е кратна на 4, т.е. първоначално са били паркирани 72 коли (2 т.), а от тях $72:4 = 18$ са били червени (1 т.).

6.2. Да се намерят всички двойки естествени числа m и n , за които е изпълнено $1! + 2! + 3! + \dots + n! = m^2$.

(с $n!$ се означава произведението на естествените числа от 1 до n : $n! = 1.2.3 \dots (n-1).n$)

Решение. Нека $n = 1$. Тогава $1! = 1 = m^2$ и $m = 1$. (1 т.) Нека $n = 2$. Тогава $1! + 2! = 3 = m^2$ и няма естествено число, за което $m^2 = 3$. (1 т.) Нека $n = 3$. Тогава $1! + 2! + 3! = 9 = m^2$ и $m = 3$. (1 т.) Нека $n \geq 4$. Тогава $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ (1 т.). Освен това $5!$, $6!$, и т. н. завършват на 0. (2 т.) Следователно $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + n!$ завършва на 3. (2 т.) Но квадрата на никое естествено число не завършва на 3, т. е. няма естествено число, за което $1! + 2! + 3! + \dots + n! = m^2$. (1 т.)

Окончателно решения на задачата са двойките (1;1) и (3;3). (1 т.)

6.3. В триъгълника ABC точка P е средата на страната BC , а точка T е от страната AC и $AT = 4TC$. Отсечките AP и BT се пресичат в точка M . Да се намери каква част от лицето на четириъгълника $TMPC$ е лицето на триъгълника CPM .

Решение. Означаваме лицето $S_{TCM} = S$. Тъй като $AT = 4TC$, то $S_{ATM} = 4S$ (1 т.) и $S_{ACM} = 5S$ (1 т.).

Точка P е средата на BC , следователно

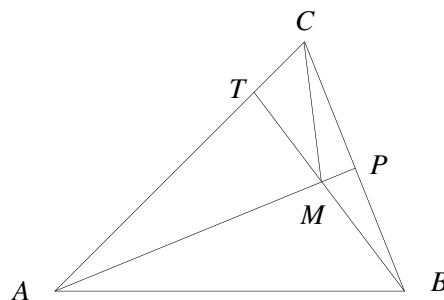
$$\left. \begin{array}{l} S_{APC} = S_{APB} \\ S_{MPC} = S_{MPB} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{ABM} = S_{ACM} = 5S. \quad (2 \text{ т.})$$

$$S_{ABT} = S_{ABM} + S_{ATM} = 5S + 4S = 9S \quad (1 \text{ т.}),$$

$$S_{ABT} = 4S_{BTC} \Rightarrow S_{BTC} = \frac{9}{4}S \quad (1 \text{ т.}).$$

$$S_{BMC} = S_{BTC} - S_{TCM} = \frac{9}{4}S - S = \frac{5}{4}S \quad (1 \text{ т.}) \Rightarrow S_{CPM} = \frac{1}{2}S_{BMC} = \frac{5}{8}S \quad (1 \text{ т.}).$$

$$\text{Тогава } S_{TMPC} = S_{TCM} + S_{CPM} = S + \frac{5}{8}S = \frac{13}{8}S \quad (1 \text{ т.}) \text{ и } S_{CPM} = \frac{5}{13}S_{TMPC} \quad (1 \text{ т.}).$$



6.4. На дъската е записано числото 4608. Всяка минута числото от дъската се умножава или дели (само ако делението е възможно без остатък) на 2 или на 3. Резултатът се записва на дъската, а старото число се изтрива. Възможно ли е точно след 33 часа и 27 минути на дъската да е записано числото 27? След най-малко колко минути числото 27 може да се появи на дъската?

Решение. Забелязваме най-напред, че числото 4608 се разлага на прости множители по следния начин $4608 = 2.2.2.2.2.2.2.2.3.3$, т.е. 9 двойки и 2 тройки. **(2 т.)** Общият брой на простите делители е равен на $9 + 2 = 11$ – нечетно число. **(2 т.)** След всяка минута броят на тези прости делители се променя с 1 (или в повече, или в по-малко), което показва, че ако в предната минута броят на простите делители е бил нечетен, той става четен и обратно. **(3 т.)** Времето от 33 часа и 27 минути (между впрочем точно 2007 минути) съдържа нечетен брой минути. – **(1 т.)**, т. е. числото на дъската трябва да съдържа четен брой прости делители, а $27 = 3.3.3$ е с нечетен брой прости делители. Следователно не е възможно да се достигне това число в исканото време. **(2 т.)** За да се получи 27 трябва от числото 4608 да отделим 9-те двойки и да добавим една тройка. Следователно най-краткия срок е $9 + 1 = 10$ минути. **(1 т.)**