

Контролно за определяне на отбора за МОМ 2012
16–17 май 2012, София (ИМИ-БАН)

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$ с център на описаната окръжност O и ъглополовяща AD , $D \in BC$. Правата ℓ минава през O и е успоредна на AD . Да се докаже, че ℓ минава през ортоцентъра на $\triangle ABC$ тогава и само тогава, когато $\triangle ABC$ е равнобедрен с основа BC или $\angle BAC = 120^\circ$.

Задача 2. Нека $n > 1$ е естествено число, M е произведението на всички естествени делители на n и X е най-голямото естествено число, за което X^2 дели M . Да се докаже, че броят на начините, по които от делителите на n могат да се премахнат три така, че произведението на останалите делители да е равно на X^2 , е число от вида $\frac{3^s - 1}{2}$, където s е цяло неотрицателно число.

Задача 3. За полином $f(x)$ с реални коефициенти от степен 2012 и положителен старши коефициент разглеждаме фигурата, съставена от всички точки с координати (x, y) , за които $y \geq f(x)$. Възможно ли е равнината на бъде покрита с краен брой такива фигури?

Задача 4. Даден е полином $f(x) = (x + d_1)(x + d_2) \cdots (x + d_9)$, където $d_1, d_2, \dots, d_9$ са различни цели числа. Да се докаже, че съществува естествено число N такова, че за всяко естествено число $x \geq N$ числото $f(x)$ има прост делител, по-голям от 22.

Задача 5. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност, която се допира до страните AB , BC и AC съответно в точките C_1 , A_1 и B_1 . Ортогоналните проекции на ортоцентъра на $\triangle A_1B_1C_1$ върху правите AA_1 и BC са съответно P и Q . Да се докаже, че правата PQ разполовява отсечката B_1C_1 .

Задача 6. Да се докаже, че съществуват естествено число n и n^9 естествени числа, по-малки от n^{10} , никои три от които не образуват аритметична прогресия.

Контролно за определяне на отбора за МОМ 2012

1. Ще използваме стандартните означения за ъглите и радиуса на $\triangle ABC$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $\alpha \geq \beta$. Ако $OH \parallel AD$ (H е ортоцентърът на $\triangle ABC$), в $\triangle OHC$ имаме $\angle HOC = \beta + 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ (имаме $\beta < 90^\circ$) и $\angle OCH = (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \alpha) = \alpha - \beta$, откъдето $\angle OHC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Тогава $\frac{OC}{CH} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos(\beta - \frac{\alpha}{2})}$.

От друга страна, имаме $CH = 2R \cos \gamma$ и следователно $\cos(\beta - \frac{\alpha}{2}) = 2 \cos \gamma \cos \frac{\alpha}{2} = -2 \cos(\alpha + \beta) \cos \frac{\alpha}{2}$, откъдето получаваме $\cos(\beta - \frac{\alpha}{2}) = -\cos(\beta + \frac{\alpha}{2}) - \cos(\beta + \frac{3\alpha}{2})$, $-\cos(\beta + \frac{\alpha}{2}) = 2 \cos(\beta + \frac{\alpha}{2}) \cos \alpha$. От последното имаме $\cos(\beta + \frac{\alpha}{2}) = 0$, което дава $\beta = \gamma$, или $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, откъдето $\alpha = 120^\circ$.

Оставяме на читателя да проследи разсъжденията в обратната посока.

2. Ясно е, че числото $\frac{M}{X^2}$ е свободно от квадрати (ако $p^2 \mid \frac{M}{X^2}$ за някое просто p , то $(pX)^2 \mid M$, което противоречи на максималността на X). Следователно $\frac{M}{X^2} = p_1 p_2 \dots p_k$ за някои две по две различни прости числа p_i , $i = 1, 2, \dots, k$. От записа на това равенство във вида $X^2 = \frac{M}{p_1 p_2 \dots p_k}$ става ясно, че всяко възможно премахване на три делителя отговаря на редица с елементи 1, 2 и 3 и дължина k (делителите се получават, като умножим числата p_i отговарящи на 1 за първия, тези на 2 за втория и тези на 3 за третия). Трите редици от еднакви числа отговарят на един и същи делител, а всяка от останалите се брой по 6 пъти. Следователно търсеният брой е $\frac{3^k - 3}{6} = \frac{3^{k-1} - 1}{2}$.

3. Да разгледаме първоначално фигурите като частта от равнината, определена от неравенството $y \geq f(x)$. Всяка такава фигура може да бъде покрита

от ъгъл с предварително зададена големина и връх върху ординатната ос. Действително, неравенството $f(x) \geq ax$ е изпълнено за всяко достатъчно голямо и за всяко достатъчно малко x , а за останалия краен интервал можем да се погрижим с трансляция на ъгъла по направление на отрицателната посока на ординатната ос.

Да допуснем, че исканото покритие на равнината е възможно. Тогава е възможно и покритие с ъгли с предварително зададени големина. Нека тези големина са зададени така, че сумата им да не надвишава 360° . Да транслираме ъглите така, че върхът им да е общ. Тогава съществува права през този връх, която няма други общи точки (освен върха) с нито един от ъглите. Това води до противоречие – тази права няма как да е била покрита преди трансляцията, тъй като всеки ъгъл е покривал най-много крайна отсечка от нея.

4. Нека P е произведението на осемте прости числа, по-малки от 20 и $N = P^s + \max\{|d_i| : i = 1, 2, \dots, 9\}$. Да предположим, че за някое $x \geq N$ всички прости делители на числото $f(x)$ са по-малки от 20. Нека p_i е просто число с максимална степен в каноничното разлагане на $x + d_i$. Ясно е, че тази степен е поне s . Освен това две от числата p_i , $i = 1, 2, \dots, 9$, съвпадат. Следователно $p_i^s | d_i - d_j$ за някои i и j , което дава противоречие при достатъчно голямо s .

5. Нека H е ортоцентърът на $\triangle A_1 B_1 C_1$ и $A_1 H_a$, $B_1 H_b$ и $C_1 H_c$ са височините на този триъгълник. Окръжността k с диаметър $A_1 H$ съдържа точките A_1 , H_b , P , H , H_c и Q . Нека AA_1 да пресича вписаната в $\triangle ABC$ окръжност за втори път в точка T . Ще използваме означението $\widehat{XY}$ за ъгъла на съответната дъга. Имаме $\widehat{H_b P} = \angle H_b A_1 P = \angle C_1 A_1 T = \widehat{C_1 T}$. Освен това $\widehat{Q H_c} = \angle Q A_1 H_c = \angle A_1 C_1 B_1 = \widehat{A_1 B_1}$ (използвахме, че QA_1 е допирателна). Аналогично $\widehat{P H_c} = \widehat{T B_1}$ и $\widehat{H_b Q} = \widehat{C_1 A_1}$. Всички тези равенства дават, че четириъгълниците $P H_b Q H_c$ и $T C_1 A_1 B_1$ са подобни.

Нека M и N са средите съответно на $B_1 C_1$ и $A_1 H$. Да отбележим, че $\angle M H_b N = 180^\circ - \angle C_1 H_b M - \angle N H_b A_1 = 180^\circ - \angle M C_1 H_b - \angle N A_1 H_b = 180^\circ - (\angle H_a C_1 A_1 - \angle C_1 A_1 H_c) = 90^\circ$ (изполвахме съответни медиани в правоъгълни триъгълници). Следователно $M H_b$ и, по подобен начин, $M H_c$, са допирателни към k . Тогава фигурите $P H_b Q H_c M$ и $T C_1 A_1 B_1 A$ са подобни. Оттук и от факта, че точките A_1 , T и A лежат на една права, следва, че съответните им точки Q , P и M също лежат на една права, което и трябваше да се докаже.

Забележка. Друго решение на тази задача може да се намери в работата на Стоян Боев в Олимпийски теми 2012 (задача 2 от раздел 6).

6. Нека $k, p \in \mathbb{N}$. Да разгледаме естествените числа, които имат k цифри в $(p+1)$ -ична бройна система (като нулите са значещи цифри). Понеже сумата от квадратите на цифрите на всяко число не надминава kp^2 , то има поне $q = \frac{(p+1)^k - 1}{kp^2}$ числа с една и съща сума r .

От друга страна, ясно е, че числата със същите цифри, но в $(2p+1)$ -ична система, са различни. Освен това, ако три от тях образуват аритметична прогресия (например $a + b = 2c$) то цифрите им на всяка позиция образуват аритметична прогресия. Това обаче е невъзможно, защото, разглеждани като точки в $\mathbb{R}^k$ (с координати съответните цифри), a , b и c лежат на k -мерната сфера с радиус $\sqrt{r}$ и същевременно са колинеарни (c е среда на отсечката с краища a и b).

И така, има поне q естествени числа, по-малки от $(2p+1)^k$, никои три от които не образуват аритметична прогресия. При $p+1 = 2^k$ следва, че има повече от $\frac{2^{k(k-2)}}{k}$ числа, по-малки от $2^{k(k+1)}$, никои три от които не образуват аритметична прогресия. Тогава за всяко достатъчно голямо число k можем да изберем n да бъде най-малкото цяло число така, че $n^{10} \geq 2^{k(k+1)}$.

Забележка. Изложената конструкция е предложена от Ф. А. Беренд през 1946 г.