

СЕДМИЦА НА ОЛИМПИЙСКАТА МАТЕМАТИКА НА ИМИ–БАН

СТАНИСЛАВ ХАРИЗАНОВ,
Институт по математика и информатика, БАН

На 3–8 януари 2023 г. в Института по математика и информатика на Българската академия на науките се проведе седмото издание на Седмицата на олимпийската математика (СОМ'23) на ИМИ–БАН. СОМ'23 се организира от ИМИ–БАН в рамките на проект K-TRIO и със съдействието на Фондация „Георги Чиликов“ и Американска Фондация за България.

За участие в СОМ'23 се класираха първите десет ученици с най-висок рейтинг от състезанията през последната година за всеки от класовете 9.–12. – Национална олимпиада по математика 2022, Есенен математически турнир „Акад. Стефан Додунеков“ 2022, Зимни математически състезания 2022 и Пролетни математически състезания 2022.

Общо покани за участие в Седмицата получават 40 ученици, но тази година поканените бяха с трима повече, поради споделяне на десетото място в три от класовете. За участие в математическия марафон се класираха ученици от Бургас, Варна, Велико Търново, Габрово, Плевен, Пловдив, Силистра и София.

С подготовката на учениците, както и с провеждането на Седмицата, бяха ангажирани някои от най-видните ни преподаватели и учени, повечето от които имат дългогодишен опит в работата с ученици и подготвянето им за международни състезания. В тазгодишното издание на СОМ участваха **Петър Бойваленков** (ИМИ–БАН), **Емил Колев** (ИМИ–БАН), **Иван Ланджев** (НБУ и ИМИ–БАН), **Станислав Харизанов** (ИИКТ и ИМИ–БАН), **Веселин Гушев** (ФМИ–СУ), **Кристиян Василев**, **Александър Иванов**, **Милен Иванов** (ФМИ–СУ) и **Драгомир Грозев**.

Програмата на Седмицата включваше четири тематични контролни в стил Международна олимпиада, по едно във всяка от основните олимпийски области – алгебра, геометрия, комбинаторика и теория на числата. Освен на контролните, учениците имаха възможност да демонстрират своите знания и чрез представяне на доклади на олимпийска тематика.

Победители в СОМ'23 станаха **Марин Христов** (СМГ) – 68 т., **Иван Тагарев** (СМГ) – 67 т., **Божидар Димитров** (ПМГ, Силистра) – 59 т., **Илияс Номан** (СМГ) – 50 т., **Никола Цачев** (ПЧМГ) – 44 т., **Мария Дренчева** (СМГ) – 40 т.

Предлагаме ви условията и решенията на задачите от СОМ'23.

Контролно по алгебра

Задача А1. Нека n е естествено число. Да се намерят всички двойки ненулеви полиноми f и g с реални коефициенти от степен n и $n + 1$ съответно, за които е изпълнено

$$(f(x))^2 - f(x^2) = g(x)$$

за всички реални x .

Задача А2. Нека a, b, c са положителни реални числа. Да се докаже, че

$$(a^7 - a^4 + 3)(b^7 - b^4 + 3)(c^7 - c^4 + 3) \geq (a + b + c)^3.$$

Задача А3. Нека f е полином с реални коефициенти от степен $n \geq 1$ и старши коефициент 1 и нека $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ са цели числа.

а) Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^n \frac{|f(x_k)|}{\prod_{j \neq k} |x_k - x_j|} \geq 1.$$

б) Да се докаже, че съществува k , за което

$$|f(x_k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

Контролно по геометрия

Задача G1. Даден е триъгълник ABC с $BC > AB > AC$. Нека точките B_1 и C_1 са на отсечките AC и AB съответно и отсечките BB_1 и CC_1 се пресичат в точка G . Описаната около триъгълника BB_1C окръжност пресича отсечката AB за втори път в точката X , а описаната около триъгълника BC_1C окръжност пресича отсечката BB_1 за втори път в точката P . Допирателната в G към описаната около триъгълника BGC окръжност пресича отсечката CP в точка Y . Описаната около триъгълника GYC окръжност пресича отсечката BG за втори път в точката Z , а правите B_1Y и XG се пресичат в точка T . Ако $\sphericalangle XC_1G = \sphericalangle XB_1G$, то да се докаже, че $\sphericalangle TC_1B = \sphericalangle TCZ$.

Задача G2. В изпъкналият четириъгълник $ABCD$ ъглите при върховете A и C са остри. Нека B_1, B_2, B_3 са петите на перпендикулярите от B към AD, AC и DC , съответно, и нека D_1, D_2, D_3 са петите на перпендикулярите от D към AB, AC и BC , съответно. Да се докаже, че окръжностите, описани около триъгълниците $B_1B_2B_3$ и $D_1D_2D_3$, се пресичат върху правата AC .

Задача G3. Даден е разностранен триъгълник ABC . Произволна окръжност ω_C се допира до правите CA и CB съответно в точките P и Q , като A е между C и P , B е между C и Q и ω_C и триъгълника ABC нямат общи точки. Окръжността Ω_C минава през A и B и се допира до ω_C в точка T_C (като ω_C е във вътрешността на Ω_C). Правите PQ и AB се пресичат в точката K_C , а правата K_CT_C пресича ω_C за втори път в точката L_C . Аналогично се дефинират точките L_A и L_B (като произволните окръжности ω_A , ω_B и ω_C са независими една от друга). Да се докаже, че правите AL_A , BL_B и CL_C се пресичат в една точка.

Контролно по теория на числата

Задача NT1. Дадени са полиномите $f(x) = x^2 + 2x + 3$ и $g(x) = 5x^2 + 2$. Разрешено ни е за започнем с произволно цяло число x , да го заместим с $f(x)$, $g(x)$ или $x - 2023$ и т.н. (на всяка стъпка заместваем текущото число y с $f(y)$, $g(y)$ или $y - 2023$). Съществува ли начално число x , за което да е възможно получаването на кое да е естествено число след краен брой операции от описания вид?

Задача NT2. Редицата $(a_n)_{n=1}^\infty$ е дефинирана чрез равенствата

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n + 1$$

за всяко $n \geq 1$. Естествените числа $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ са по-големи от 1, $X = x_1 + x_2 + \dots + x_{2023}$ и са такива, че

$$x_i - 1 \mid X$$

за всяко $1 \leq i \leq 2023$. Да се докаже, че $X \leq 2023(a_{2024} - 1)$ и да се определи кога се достига равенство.

Задача NT3. Нека p е фиксирано просто число. С $\text{rad}_p(n)$ означаваме произведението на всички различни прости делители на n , различни от p . Нека $c \neq 0$ е цяло число и $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ е мултипликативна функция със свойството

$$\text{rad}_p(n) \mid f(n+1) - c$$

за всяко естествено число n . Да се докаже, че $f(n) = n^r$ за някакво естествено число r .

Контролно по комбинаторика

Задача С1. В равнината са дадени 128 точки, всеки две от които са свързани с отсечка. Иван записва на всяка отсечка по една цифра, а след това Петър записва на всяка точка по една цифра. Ако има две точки на които е записана една и съща цифра и на отсечката между тях е записана същата цифра, печели Иван. В противен случай печели Петър. Да се определи кой има печеливша стратегия.

Задача С2. За всяко непразно множество A от реални числа с $S(A)$ означаваме сбора от елементите на A . Да се намери най-малкото реално число t със следното свойство: За всяко естествено число n и всяко множество M от n положителни реални числа, множеството от всички непразни подмножества на M може да се раздели на n непресичащи се групи, така че ако P и Q са множества от една и съща група, то $\frac{S(P)}{S(Q)} \leq t$.

Задача С3. В галактика има N планети, като някои от тях са свързани с двупосочни авиолинии. Броят на линиите е $N - 1$ и те са номерирани с числата $1, 2, \dots, N - 1$ по произволен начин. За всяка планета A с $S(A)$ означаваме броя на планетите $B \neq A$, които са свързани директно с A или за които съществува път от A до B , като номерата на авиолиниите по този път са в нарастващ ред. Да се намери най-малката стойност на N , за която е възможно $S(A) \geq 2023$ за всяка планета A .

Решения на задачите

A1. Нека $f(x) = a_0x^n + a_{n-k}x^k + \dots$, където $a_{n-k}x^k$ е първият ненулев член, по-малък от старшия. Тогава

$$f(x)^2 = a_0^2x^{2n} + 2a_0a_{n-k}x^{n+k} + \dots \quad f(x^2) = a_0x^{2n} + a_{n-k}x^{2k} + \dots$$

Разликата на тези полиноми е от степен $2n > n + 1$, освен ако $a_0 = 1$ (случаят $n = 1$ е разгледан по-долу). Следователно, $a_0 = 1$ и следващият коефициент на $f(x)^2 - f(x^2)$ е $2a_{n-k}x^{n+k}$, който трябва да бъде старши коефициент на $g(x)$, т.е. $k = 1$. Следователно, $f(x) = x^n + ax + b$, $a \neq 0$, и $g(x)$ се определя еднозначно от това:

$$g(x) = 2ax^{n+1} + (a^2 - a)x^2 + 2abx + b^2 - b, \quad a \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Ако $n = 1$, то $f(x) = ax + b$, $g(x) = (a^2 - a)x^2 + 2abx + b^2 - b$, следователно, за да бъдат това полиноми от степен съответно 1, 2, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$.

A2. Наблюдаваме, че $x^7 - x^4 - x^3 + 1 = (x^4 - 1)(x^3 - 1) \geq 0$ за всяко положително x , следователно $a^7 - a^4 + 3 \geq a^3 + 2$. Достатъчно е да докажем, че

$$(a^3 + 1 + 1)(b^3 + 1 + 1)(c^3 + 1 + 1) \geq (a + b + c)^3.$$

Последното следва директно от неравенство на Хьолдер. Алтернативно, след разкриване на скобите в $(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) \geq (a + b + c)^3$ получаваме неравенство, което следва от събиране на неравенствата:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 c^3 + 1 &\geq 3abc, \\ a^3 b^3 c^3 + 1 + 1 &\geq 3abc, \\ a^3 + a^3 b^3 + 1 &\geq 3a^2 b, \\ a^3 + a^3 c^3 + 1 &\geq 3a^2 c, \\ b^3 + a^3 b^3 + 1 &\geq 3b^2 a, \\ c^3 + a^3 c^3 + 1 &\geq 3c^2 a, \\ b^3 c^3 + b^3 + 1 &\geq 3b^2 c, \\ b^3 + c^3 + c^3 &\geq 3c^2 b. \end{aligned}$$

Всяко от тези неравенства следва от СА-СГ.

A3. Формулата в а) предполага използване на интерполационната формула на Лагранж: за точките $x_0, x_1, \dots, x_n$ и стойностите $c_0, c_1, \dots, c_n$ съществува единствен полином от степен $\leq n$ със стойност c_i в точката x_i , и той е

$$\sum_{k=0}^n c_k \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Следователно,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

и заради неравенството на триъгълника

$$|f(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f(x_k)| \prod_{j \neq k} \frac{|x - x_j|}{|x_k - x_j|}.$$

Разделяме на x^n и оставаме $x \rightarrow \infty$ и така получаваме а) (тук е важно, че старшият коефициент е 1).

За б), използваме факта, че x_j са различни цели числа, следователно $\prod_{j \neq k} |x_k - x_j| \geq k!(n - k)!$ и

$$\sum_{k=0}^n \frac{|f(x_k)|}{k!(n - k)!} \geq 1.$$

Знаем, че

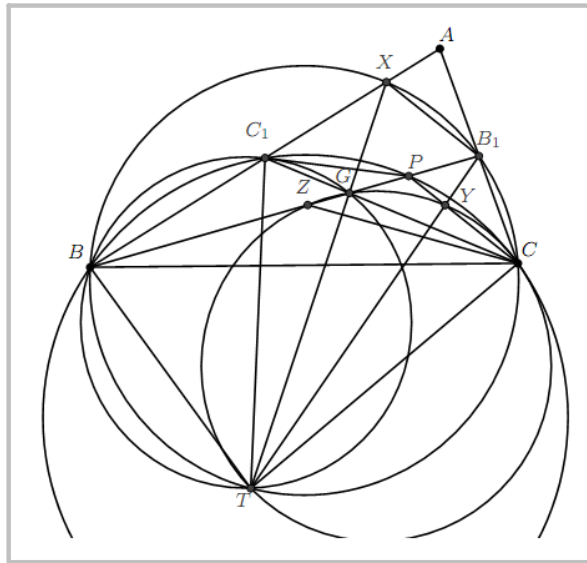
$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_0^n \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{2^n}{n!},$$

следователно за поне едно k е вярно, че $|f(x_k)| \geq n!/2^n$.

G1. Първо ще докажем, че (независимо от условието за равните ъгли) T лежи на описаната около триъгълника BB_1C окръжност – еквивалентно, $\sphericalangle BXT = \sphericalangle BB_1T$. Имаме $\sphericalangle CC_1X = \sphericalangle CPB_1$, както и $\sphericalangle CB_1P = \sphericalangle CXC_1$, откъдето следва, че $\triangle CPB_1 \sim \triangle CC_1X$.

От друга страна $\sphericalangle CGY = \sphericalangle GBC = \sphericalangle CC_1P$, което значи, че $C_1P \parallel GY$. От Теорема на Талес следва, че $\frac{C_1G}{GC} = \frac{PY}{YC}$, следователно точките Y и G са съответни елементи в подобните триъгълници. Така получаваме, че $\sphericalangle PB_1Y = \sphericalangle C_1XG$, което е еквивалентно на $\sphericalangle BXT = \sphericalangle BB_1T$.

Сега от условието имаме, че $\sphericalangle GC_1X = \sphericalangle GB_1X = \sphericalangle BTG$, тоест точките B, C_1, G, T лежат на една окръжност. От $\sphericalangle CGY = \sphericalangle CBB_1 = \sphericalangle CTB_1$ следва, че точките T, G, C, Y, Z лежат на една окръжност. Сега от последните два вписани четириъгълника получаваме $\sphericalangle TC_1B = \sphericalangle TGZ = \sphericalangle TCZ$, което искахме да докажем.



G2. Нека точката P е такава, че $\sphericalangle PAC = \sphericalangle BAD$, $\sphericalangle PCA = \sphericalangle BCD$ и P и B са в различни полуравнини спрямо AC . Нека също P_1, P_2 и P_3 са петите на перпендикулярите от P към AD, AC и DC , съответно. Имаме $\triangle CBV_2 \sim \triangle CPP_3$ и $\triangle CBV_3 \sim \triangle CPP_2$, откъдето

$$\frac{CB_2}{CP_3} = \frac{CB}{CP} = \frac{CB_3}{CP_2}.$$

Следователно точките P_2, B_2, P_3 и B_3 лежат на една окръжност и понеже симетралите на P_2B_2 и P_3B_3 се пресичат в средата на BP , то тази среда O е център на тази окръжност. Аналогично P_2, B_2, P_1 и B_1 лежат на една окръжност със същия център O , като всъщност тази и предишната окръжност съвпадат. В частност, описаната около триъгълника $B_1B_2B_3$ окръжност минава през точката P_2 , която лежи на AC . Аналогично като повторим описаната конструкция за D спрямо ABC ще получим, че ако Q е аналогично дефинираната на P точка, то описаните около триъгълниците ACP и ACQ окръжности са симетрични спрямо AC . Така аналогично дефинираната на P_2 съвпада с P_2 и лежи на окръжността около $D_1D_2D_3$, с което исканото е доказано.

G3. Ще докажем, че (независимо от избора на ω_C) CL_C минава през допирната точка C_1 на вписаната окръжност на ABC със страната AB . Тогава ще следва, че трите разглеждани прави се пресичат в точката на Жергон и задачата ще е решена.

Нека AT_C и BT_C пресичат ω_C за втори път в точките X и Y , съответно. Чрез хомотетията с център T_C , изпращаща ω_C в Ω_C (или разглеждане на общата допирателна и съображения с периферни ъгли), получаваме $XY \parallel AB$. Нататък, да забележим, че хомотетията с център C , изпращаща вписаната окръжност на ABC в ω_C , изпраща C_1 в точка, чиято допирателна в ω_C е успоредна на AB , а оттук и на XY – така тази точка е точно средата на дъгата $\widehat{XT_CY}$ (и искаме да се окаже, че е L_C). Следователно е достатъчно да докажем, че T_CK_C е външна ъглополовяща за $\sphericalangle XT_CY = \sphericalangle AT_CB$, което е еквивалентно на $\frac{AK_C}{K_CB} = \frac{AT_C}{BT_C}$.

От теоремата на Менелай за триъгълника CPQ и правата ABK_C получаваме $\frac{CP}{PA} \cdot \frac{AK_C}{K_CB} \cdot \frac{BQ}{QC} = 1$ и тъй като $CP = CQ$, то

$$\frac{AK_C}{K_CB} = \frac{AP}{BQ}.$$

От друга страна, чрез степените на точките A и B относно ω_C получаваме $AP^2 = AX \cdot AT_C$ и $BQ^2 = BY \cdot BT_C$ и следователно

$$\frac{AP^2}{BQ^2} = \frac{AX}{BY} \cdot \frac{AT_C}{BT_C} = \left(\frac{AT_C}{BT_C} \right)^2$$

(последното от теоремата на Талес). Така $\frac{AK_C}{K_CB} = \frac{AT_C}{BT_C}$ и исканото следва.

NT1. Отговор – Не! Да разгледаме ситуацията по модул 17². Тъй като $f = (x+1)^2 + 2$ и $g = 5x^2 + 2$, от f или $g \equiv 2 \pmod{17}$ следва, че съответно

f или $g \equiv 2 \pmod{17^2}$. Операцията $x - 2023$ не променя остатъка по модул 17^2 . Следователно е невъзможно да се получат числата, които са сравними с 19 по модул 17^2 .

Забележка. Лесно се вижда, че чрез f отместваме с 2 квадратичните остатъци по модули 7 и 17, а чрез g правим същото с квадратичните не-остатъци по тези модули (защото 5 е квадратичен неостатък по модул 7 и 17). Следователно можем да получим всички остатъци по модули 7 и 17.

NT2. Ще използваме следната лема.

Лема. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е редицата от условието и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ са такива естествени числа, че $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} < 1$. Тогава

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Доказателство. Да отбележим, че

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{A_n - 1}{A_n},$$

където $A_n = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$.

Ще проведем индукция по n , като базата $n = 1$ е очевидна. Да означим $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = C_n$ и $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} = B_n$ и да фиксираме $n \geq 2$. Да допуснем, че исканото не е изпълнено, т.е. $B_i \leq C_i$ за всяко $i \leq n - 1$, но $B_n > C_n$. Прилагайки двукратно сумиране по Абел, получаваме

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i} &= C_1(b_1 - b_2) + C_2(b_2 - b_3) + \dots + C_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + C_n \cdot b_n \\ &< B_1(b_1 - b_2) + B_2(b_2 - b_3) + \dots + B_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + B_n \cdot b_n = n. \end{aligned}$$

Но

$$\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i} \geq n \sqrt[n]{\frac{b_1 \dots b_n}{a_1 \dots a_n}}$$

от неравенството между средното аритметично и средното геометрично, откъдето

$$b_1 b_2 \dots b_n < a_1 a_2 \dots a_n.$$

Следователно

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \leq \frac{b_1 b_2 \dots b_n - 1}{b_1 b_2 \dots b_n} < \frac{a_1 a_2 \dots a_n - 1}{a_1 a_2 \dots a_n},$$

с което лемата е доказана.

Обратно в задачата, да положим $d_i = \frac{X}{x_i - 1}$ за $i = 1, 2, \dots, 2023$. Тогава

$$\begin{aligned}\frac{X}{d_1} + \frac{X}{d_2} + \dots + \frac{X}{d_{2023}} &= X - 2023, \\ \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_{2023}} &= 1 - \frac{2023}{X} < 1.\end{aligned}$$

От лемата следва, че

$$1 - \frac{2023}{X} \leq 1 - \frac{1}{A},$$

където $A = a_1 a_2 \dots a_{2023}$. Оттук

$$X \leq 2023 a_1 a_2 \dots a_{2023} = 2023(a_{2024} - 1).$$

Равенство се достига тогава и само тогава, когато $d_i = a_i$, т.е. при

$$x_i = \frac{2023(a_{2024} - 1)}{a_i} + 1; \quad i = 1, 2, \dots, 2023.$$

NT3. Да фиксираме естествени числа a и b и нека $q > \max(a, b, |c|, |cf(ab) - f(a)f(b)|)$, $q \neq p$ е просто число. Съществуват естествени числа r, s, x, y такива, че $ax = 1 + rq$, $by = 1 + sq$ и x, y са прости числа, като при това $\gcd(x, ab) = \gcd(y, abx) = 1$.

Можем да запишем $abxy = qT + 1$, където $T = r + s + qrs$. Тогава $f(a)f(x) = f(ax) = f(1 + qr) \equiv c \pmod{q}$. По-нататък,

$$f(b)f(y) = f(by) = f(1 + sq) \equiv c \pmod{q}.$$

Накрая, $f(ab)f(x)f(y) = f(abxy) = f(qT + 1) \equiv c \pmod{q}$. От избора на q следва, че $f(x)f(y)$ не се дели на q . Тогава

$$f(a)f(b) \equiv cf(ab) \pmod{q}.$$

Нещо повече, от избора на q следва, че $cf(ab) = f(a)f(b)$. Полагайки $a = b = 1$, получаваме $c = 1$, т.е. функцията f е напълно мултипликативна, $f(ab) = f(a)f(b)$ за всички цели a и b .

Нека N е естествено число и q е прост делител на $f(N)$. Ще докажем, че $q \mid pN$. Да допуснем противното (т.е. $\gcd(q, Np) = 1$). Тогава съществуват естествени числа x и y , за които $Nx = qy + 1$. Тъй като $q \neq p$, получаваме

$$0 \equiv f(N)f(x) = f(Nx) = f(1 + qy) \equiv 1 \pmod{q},$$

противоречие. Следователно за всяко просто число r можем да запишем $f(r) = r^{\alpha_r} p^{\beta_r}$. В частност, $f(p) = p^{\alpha}$. Сега за естествени числа n и s имаме

$$f(np^{2s}) = f(1 + (np^{2s} - 1)) \equiv 1 \pmod{\text{rad}_p(np^{2s} - 1)}.$$

От друга страна,

$$n^\alpha f(np^{2s}) = n^\alpha f(n)p^{2s\alpha} = f(n)(np^{2s})^\alpha \equiv f(n) \pmod{\text{rad}_p(np^{2s} - 1)}.$$

Следователно, за всяко s имаме, че $\text{rad}_p(np^{2s} - 1)$ дели $f(n) - n^\alpha$. Тъй като множеството от прости делители на $x_s = np^{2s} - 1$ е безкрайно, можем да изберем подходящо s , за което $f(n) = n^\alpha$.

C1. Ще докажем, че Иван има печеливша стратегия. Да разгледаме произволни 121 от дадените точки и да ги означим с двойките (a, b) , където a и b са числа от 1 до 11. Тъй като 11 е просто число, то за всеки две двойки $A(a_1, b_1)$ и $B(a_2, b_2)$ съществува най-много едно k , за което $a_1 - a_2 \equiv k(b_1 - b_2) \pmod{11}$. Когато k е цифра, Иван записва на отсечката AB цифрата k . Върху останалите отсечки Иван записва произволни цифри.

Директно се проверява, че ако върху отсечките AB и AC е записана една и съща цифра, то върху отсечката BC е записана същата цифра. Също така, за всяка цифра точките се разделят на 11 групи от по 11 точки, като във всяка група върху всички отсечки е записана една и съща цифра.

Петър записва на тези 121 точки 121 цифри и следователно някоя цифра k ще се среща 12 пъти. От принципа на Дирихле следва, че някои две от тези 12 точки ще са в една от 11-те групи, на които се разделят дадените точки спрямо цвета k .

Получаваме две точки, на които е записана една и съща цифра k и на отсечката между тях е записана същата цифра k , т.е. печели Иван.

C2. Да допуснем, че съществува константа $t < 2$, която удовлетворява условието на задачата. Да разгледаме множеството $M = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}\}$. Сборът от числата на всички подмножества са точно двоичните представления на числата от множеството $B = \{1, 2, 3, \dots, 2^n - 1\}$. Да допуснем, че съществува разбиване на множеството B на n групи, така че отношението на всеки две числа в дадена група е по-малко от t . Ясно е, че числата $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$ трябва да са в различни групи. Нека $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ са групите, като $2^k, 0 \leq k \leq n-1$ лежи в B_k . Нека някое множество B_k съдържа повече от 2^k елемента. Ако a е най-малкото число в B_k , то $a \leq 2^k$ и отношението на най-голямото число в B_k и a е поне

$$\frac{a + 2^k}{a} = 1 + \frac{2^k}{a} \geq 2,$$

противоречие.

Следователно общо във всички множества $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ числата са най-много $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. От друга страна този брой е точно $2^n - 1$ и следователно във всяко множество B_k има точно 2^k числа. Тогава

отношението на най-малкото число a в B_{n-1} и най-голямото число в B_{n-1} (което е поне $a + 2^{n-1} - 1$) е поне $\frac{a + 2^{n-1} - 1}{a} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Следователно

$$t \geq 2 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

което е невъзможно, тъй като $t < 2$.

Нека $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ е произволно множество от положителни числа, за които $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Нека $S_0 = 0$, $S_i = a_1 + \dots + a_i$ за $i = 1, 2, \dots, n$. Ако σ е сбор на елементи на подмножество на M , то съществува i , за което

$$(1) \quad S_{i-1} < \sigma \leq S_i.$$

Разбиваме множеството от сумите на подмножества $c_1, c_2, \dots, c_n$, където в c_i са всички суми, удовлетворяващи (1). Ще докажем, че ако $\sigma \in c_i$, то $\frac{S_i}{2} < \sigma \leq S_i$. Тъй като $\sigma > S_{i-1} = a_1 + \dots + a_{i-1}$, то σ съдържа поне едно събираемо a_k за което $k \geq i$. Тогава $S_i - \sigma < S_i - S_{i-1} = a_i \leq a_k \leq \sigma$ и следователно $\sigma > \frac{1}{2}S_i$. Но $\sigma \leq S_i$, т.е. твърдението е доказано.

С3. От условието е ясно, че за търсеното минимално N графът е дърво с $N-1$ ребра. В противен случай ще има свързана компонента, за която броят на ребрата е по-малък от броя на върховете (т.е. тази свързана компонента е дърво), което е противоречие с минималността на N . С индукция по k ще докажем, че ако за всяка планета $S(A) \geq k$, то $N \geq 2^k$.

При $k = 1$ твърдението е очевидно. Ако твърдението е вярно за някое k да разгледаме такова N , за което в съответното дърво G за всяка планета е вярно $S(A) \geq k + 1$. Да премахнем реброто с най-голям номер. Тогава G се разпада на две дървета, като за всяка планета A от едната компонента в $S(A)$ влиза най-много една планета от другата компонента. Следователно във всяка компонента е изпълнено $S(A) \geq k$ и следователно във всяка от тях има поне 2^k планети. Общо планетите са 2^{k+1} .

Пример при $k = 1$ се дава с $2^1 = 2$ планети. Нека имаме пример за дърво с 2^k планети и $S(A) = k$ за всяка планета. Добавяме нови 2^k планети, всяка от които свързваме с точно една от старите, като номерираме новите ребра с най-малките номера. Получаваме пример с 2^{k+1} планети и $S(A) = k + 1$.

Задачите са предложени от: Милен Иванов – A1, A2, A3; Кристиан Василев – G1; Александър Иванов – G2, G3, C2, C3; Емил Колев – C1, Данила Черкашин (идея Георгий Струков и Сергей Сотников) – NT1, Александър Иванов и Сергей Берлов – NT2, Навид Сафаей – NT3.