

СМБ – Секция “Изток”
КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 8.12.2012
7 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент : Всяка задача от 1 до 16 има само един правилен отговор от четири възможни (отбелязани с а), б), в), г)). За задачи 17 до 22 трябва да бъдат записани само отговорите, а задачи 23 и 24 трябва да бъдат подробно решени. Задачите от 1 до 4 се оценяват с по 1 точка; задачи от 5 до 10 – с по 2 точки; задачи от 11 до 16 – с по три точки; задачи 17 до 20 – с по 5 точки; задачи 21 и 22 – с по 8 точки и задачи 23 и 24 – с по 15 точки. Максималният брой точки е 100. Неправилни решения и задачи без отговор се оценяват с 0 точки.

Организаторите Ви пожелават успех !

Име.....училище.....град.....

1. Ако a и b са рационални числа и $a > 0; b < 0$, кое от следните неравенства винаги е ВЯРНО?

- 1) $-a < b$ 2) $a + b > 0$ 3) $a < -b$ 4) $ab < 0$
а) първото б) второто в) третото г) четвъртото

2. Приведете в нормален вид израза $\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2} + a^2\right)$

- а) $a^3 - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4}$ б) $a^3 - \frac{1}{8}$ в) $a^3 + \frac{1}{8}$ г) $a^3 - \frac{1}{4}$

3. Намерете стойността на израза $\frac{-x^3y + xy^3}{x^2y + xy^2}$ за $x = -3\frac{2}{3}$ и $y = \frac{1}{3}$

- а) 4 б) -4 в) $3\frac{1}{3}$ г) $-2\frac{1}{3}$

4. Правилна шестоъгълна пирамида с височина 6 см има основен ръб, равен на 6 см и апотема на основата 4,2 см. Обемът на пирамидата е равен на:

- а) 75,6 куб.см б) 151,2 куб.см в) 153,4 куб.см г) 164,8 куб.см

5. Пресметнете стойността на отношението $\frac{a-b}{a+b}$, ако $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$.

- а) $\frac{7}{3}$ б) $\frac{3}{7}$ в) $\frac{2}{5}$ г) $\frac{3}{5}$

6. Точките А, В и С лежат на една права, като АВ=2 см и ВС=5 см. На колко см е равна АС?

- а) 3 см б) 7 см в) 3 см или 7 см г) 1 см или 3 см.

7. Разликата на квадратите на две естествени числа е равна на 41. По-малкото от тези числа е:

- а) 26 б) 24 в) 18 г) 20.

8. Лъчите OM и ON сключват ъгъл, равен на $40^{\circ}30'$. Лъчът OP е перпендикулярен на лъча OM, а лъчът OQ е противоположен на лъча ON. Мярката на ъгъл POQ е:

- а) $139^{\circ}30'$ б) $49^{\circ}30'$ или $130^{\circ}30'$ в) $49^{\circ}30'$ или $139^{\circ}30'$ г) $130^{\circ}30'$ или $40^{\circ}30'$

9. Сборът на три числа е равен на 510. Второто число едва пъти по-голямо от първото, а третото се отнася към второто, както 4:3. Кое е най-голямото от трите числа?

- а) 240 б) 180 в) 360 г) 420

10. Лъчът ОС е вътрешен за ъгъл АОВ. Ъгъл COB е с 10° по-малък от ъгъл AOC и е $\frac{5}{6}$ от него.

Намерете мярката на ъгъл AOB.

- а) 50° б) 60° в) 110° г) 130°

11. Даден е изразът $M = \frac{m^2 - m.n}{m^2.n + n^3}$, където m и n са естествени числа. Ако m е стойността на

израза $\frac{(-2^2)^4 \cdot (-27)^3}{-(-2)^8 \cdot (-9)^4}$, а n е модула на най-голямото цяло отрицателно число, то стойността на израза

M е равна на:

- а) -1 б) $-\frac{2}{5}$ в) $\frac{3}{5}$ г) $\frac{1}{5}$

12. Сборът на дължините на две от страните на триъгълник е 18 см, а височините към тях са 6 см и 3 см. Намерете лицето на триъгълника.

- а) 12 кв.см б) 18 кв.см в) 21 кв.см г) 24 кв.см

13. Ако $A = 2x^3 - 4x + 3$, $B = x^3 - 2x^2 + 3$, $C = -2x^2 - 2x + 5$, то нормалният вид на многочлена $A - B + 2C$ е:

- а) $x^3 - 4x + 10$ б) $2x^3 - 2x^2 - 4x + 2$ в) $x^3 - 2x^2 - 8x + 10$ г) $x^3 - x^2 - 3x + 10$

14. Правоъгълник е разделен на четири по-малки правоъгълника. Три от тях имат лица 6 кв.см, 8 кв.см и 10 кв.см. Намерете лицето на четвъртия от малките правоъгълници.

- а) 4 кв.см б) 8 кв.см в) 12 кв.см г) 7,5 кв.см

?	

15. Дадени са многочлените $P(x) = x^2 + ax + 2a^2$, $Q(x) = x^2 - ax + a^2$. За кои стойности на a е вярно равенството $P(2) - 2Q(1) = 2$?

- а) 1 б) 2 в) -2 г) 0

16. На колко е равно $x^3 + 3xy + y^3$, ако $x + y = 1$?

- а) 1 б) 3 в) $6x^2$ г) 0

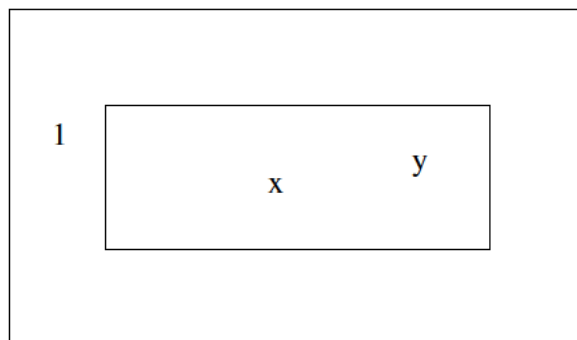
17. $\frac{3}{10}$ от прасковите в една касетка са равни на 25% от прасковите във втора касетка, а 0,8 части от прасковите във втората касетка са с 1 кг по-малко от тези в първата. Колко кг праскови има в първата касетка?

18. В тъпоъгълен триъгълник острите ъгли са α и β . Намерете стойностите на ъглите, сключени между продълженията на височините в триъгълника.

19. За кои стойности на a и b изразът $a^2 + 6b^2 - 20b - 2ab + 23$ приема най-малка стойност?

20. Разложете на множители израз $x^4 + 4$.

21. Правоъгълна градинка с дължина x ($x < 10$) м и ширина y м, където x и y са цели числа, трябва да се огради от четирите страни с пътека, широка 1 м. Лицето на пътеката е равно на лицето на градинката. Намерете: а) размерите на градинката; б) лицето на целия обект (градинката и пътеката).



22. Построена е шатра във вид на конус. Височината на шатрата е 3 м, а за радиуса, височината и образувателната на конуса знаем, че се отнасят както 8:6:10.

а) колко кг боя е необходима за боядисване на шатрата, ако за 1 кв.м площ се използва 0,6 кг боя?

б) подът на шатрата е покрит с балатум (подово покритие). Колко кв.м балатум е необходим за покриването му?

23. а) Да се разложи на множители изразът $xy + 3y - 2x - 6$.

б) Да се докаже, че има точно две двойки цели числа $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, за които е изпълнено равенството $xy + 3y - 2x - 5 = 0$ и да се намерят тези числа.

в) Ако $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$ са точки в координатната система, да се намери лицето на триъгълника OMN .

24. Даден е равнобедрен триъгълник ABC , в който $\angle ACB = 20^\circ$. Върху бедрото AC е взета точка M , така че $\angle ABM = 60^\circ$, а върху бедрото BC е взета точка N , така че $\angle BAN = 50^\circ$.

а) да се определи видът на триъгълника ABN ; б) Да се намерят ъглите $\angle AMN$ и $\angle ANM$.

О т г о в о р и

Зад.№	отг.	отг.	отг.	отг.
1				г
2			в	
3	а			
4		б		

Брой верни отговори 4 х 1 точка = 4 точки

Зад.№	отг.	отг.	отг.	отг.
5		б		
6			в	
7				г
8		б		
9	а			
10			в	

Брой верни отговори 6 х 2 точки = 12 точки

11			в	
12		б		
13			в	
14				г
15				г
16	а			

Брой верни отговори 6 х 3 точки = 18 точки

Зад.№	Резултат	точки
17	25 кг	5
18	$\alpha, \beta, \alpha + \beta$	5
19	$a = 2 \quad b = 2$	5
20	$(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$	5
21	а) $x=6\text{см}, y=4\text{см}$ б) 240 кв.м	8
22	а) 36,68 кв.м б) 50,24 кв.м	8

Зад.№	ТОЧКИ
23	15
24	15

Общ брой точки	100
----------------	-----

Решение 23 задача

а) $xy + 3y - 2x - 6 = y(x+3) - 2(x+3) = (y-2)(x+3)$

2 т.

б) $xy + 3y - 2x - 5 = 0 \Rightarrow xy + 3y - 2x - 6 + 1 = 0 \Rightarrow (y-2)(x+3+1) = 0 \Rightarrow$
 $(y-2)(x+3) = -1$ Понеже x и y са цели числа

или $y-2=1$ и $x+3=-1 \Rightarrow y_1=3 \quad x_1=-4$

или $y-2=-1$ и $x+3=1 \Rightarrow y_2=1 \quad x_2=-2$

7 т.

в) Точките $M(-4;3)$, $N(-2;0)$ и $O(0;0)$ са върхове на $\triangle OMN$
ако $M_1(-4;2)$, $N_1(-4;2)$ и $P(-4;0)$ то

$$S(\triangle MNO) = S(\triangle PMO) - S(\triangle MM_1N) - S(\triangle PM_1NN_1) - S(\triangle NON_1) = 6 - 2 - 2 - 1 = 1 \quad 6 \text{ т.}$$

Решение 24 задача

а) $\angle ABN = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ \quad \angle ANB = 50^\circ \Rightarrow \angle BAN = 50^\circ$ и триъгълникът ABN е
равнобедрен ($AB = BN$)

2 т.

б) построяваме точка $P (P \in AC)$, така че $\angle ABP = 20^\circ$.

Тогава $\triangle ABP$ е равнобедрен $\angle BAP = \angle APB = 80^\circ$ и $AB = BP$ 3 т

Понеже $AB = BN \Rightarrow BP = BN$ т.е. $\triangle PBN$ е равнобедрен. 2 т

От друга страна $\angle PBN = 60^\circ \Rightarrow \triangle PBN$ е равностранен и
 $\angle ANP = 10^\circ (60^\circ - 50^\circ)$,

$$\angle NPM = \angle BPM - \angle BPN = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$$

3 т

$\triangle BPM$ е равнобедрен ($BP = PM$), защото $\angle PBM = 40^\circ$,
 $\angle BPM = 100^\circ, \angle PMB = 40^\circ$.

1 т

Тогава и $\triangle PMN$ е равнобедрен ($PB = PN = PM$) и

$$\angle PMN = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ \text{ т.е. } \angle AMN = 70^\circ \quad 2 \text{ т}$$

Освен това $\angle ANM = \angle ANP + \angle PNM = 10^\circ + 70^\circ = 80^\circ \quad 2 \text{ т}$

