Десети български фестивал на младите математици

Първи кръг, Тема за 8 – 9 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. На дъската са записани n естествени числа. Към тях можем да добавяме естествени числа от вида $\dfrac{2a+b}{a-b}$, където a и b са две от дадените числа. Известно е, че по този начин на дъската може да се запише всяко естествено число. Да се намери най-малката възможна стойност на n.

Отговор: 2. Тъй като $\dfrac{2a+b}{a-b}=1$ и $\dfrac{2a+b}{a-b}=2$ са невъзможни, то числата 1 и 2 трябва да са записани на дъската. Ще докажем, че от тях може да се получи всяко естествено число.

Първо получаваме $5=\dfrac{2.2+1}{2-1}$, $4=\dfrac{2.5+2}{5-2}$ и $3=\dfrac{2.4+1}{4-1}$.

Нека сме получили всички числа от 1 до $3k+2$ включително. Тогава последователно получаваме $3k+5=\dfrac{2.(k+2)+(k+1)}{(k+2)-(k+1)}$, $3k+4=\dfrac{2.(3k+5)+(3k+2)}{(3k+5)-(3k+2)}$ и $3k+3=\dfrac{2.(3k+4)+(3k+1)}{(3k+4)-(3k+1)}$ и твърдението следва по индукция.

Задача 2. В турнир по футбол участвали 5 отбора, като всеки два отбора изиграли по една среща. При равен резултат двата отбора получават по 1 точка. При победа на единия отбор с резултат $a:b$, където $a>b$ победителят получава $3+a-b$ точки, а победения получава 0 точки. В крайното класиране първия отбор вкарал 12 гола, допуснал 3 гола, а втория, третия, четвъртия и петия отбор имали съответно 13, 8, 4 и 0 точки. Колко точки може да има първия отбор?

Отговор: 19 или 21.

Задача 3. Нека n е естествено число. Колко n-цифрени числа имат в записа си точно три различни цифри?

Отговор: $324(3^{n-1}-2^n+1)$**.** Ако има 0, има $9.8:2!=36$ избора за другите две цифри, участващи в числото. За първата цифра има 2 избора, а за всяка от следващите - по 3 (общо 2.3^{n-1} избора), от които трябва да се изключат числата, в които участват само две от цифрите (общо $2^{n-1}+2^{n-1}+2^n=2^{n+1}$ избора), и да се включат числата, в които участва само една от цифрите (2 избора). Общо $36.(2.3^{n-1}2^{n+1}+2)$ числа.

Ако няма 0, има $9.8.7:3!=84$ избора за ненаредената тройка цифри, участващи в числото. За всяка от шестте му позиции има по 3 избора (общо 3^n избора), от които трябва да се изключат числата, в които участват само две от избраните цифри (общо 3.2^n избора), и обратно да се включат числата, в които участва само една от тези цифри (общо 3 избора). Общо $84.(3^{n-3}.2^n+3)$ числа.

Всички търсени числа са $36.(2.3^{n-1}-2^{n+1}+2)+84.(3^n-3.2^n+3)=324(3^{n-1}-2^n+1)$.

Задача 4. По окръжност са записани последователно 10 числа – $a_1,a_2,a_3,\dots,a_9,a_{10}$. Всяко число е заменено със средноаритметичното на двете си съседни числа (a_1 и a_{10} са съседни), като новите числа са $1,2,3,\dots,9,10$ в някакъв ред.

а) Да се докаже, че всяко от числата $a_1,a_2,a_3,\dots,a_9,a_{10}$ е цяло.

б) Да се намери най-голямото и най-малкото число, което което може да се среща измежду първоначално записаните числа.

Отговор: б) 24, -13. а) Нека първоначалните числа са $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ и след заместване на тяхно място са получени $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_9, b_{10}$, където $\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_9, b_{10}\} = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$. Тогава

$$a_1 + a_3 = 2b_2, a_3 + a_5 = 2b_4, a_5 + a_7 = 2b_6, a_7 + a_9 = 2b_8, a_9 + a_1 = 2b_{10},$$

откъдето пресмятаме

$$2a_1 = (a_1 + a_3) - (a_3 + a_5) + (a_5 + a_7) - (a_7 + a_9) + (a_9 + a_1) = 2(b_2 - b_4 + b_6 - b_8 + b_{10})$$

и следователно a_1 е цяло число.

б) От а) следва, че най-голямото число е $10 + 9 + 8 - 1 - 2 = 24$, а най-малкото е $1 + 2 + 3 - 10 - 9 = -13$.

Задача 5. В остроъгълен триъгълник ABC са построени медианата AA_1 и височината BH. Описаната около $\triangle AA_1H$ окръжност пресича BH в точка X, като $AX = BC$. Да се намери $\sphericalangle A_1AC$.

Отговор: 30°. Тъй като $\sphericalangle BHA = 90^\circ$, то отсечката AX е диаметър на описаната около $\triangle AA_1H$ окръжност. От правоъгълния триъгълник BHC следва, че $HA_1 = \dfrac{1}{2}BC$ и тогава $HA_1 = \dfrac{1}{2}AX$. Следователно централният ъгъл, съответстващ на дъгата HA_1 е равен на 60°, откъдето $\sphericalangle A_1AC = \sphericalangle A_1AH = 30^\circ$.

Задача 6. През точка P, вътрешна за триъгълника ABC, са построени отсечките PL, PM и PK, съответно успоредни на BC, AC и AB, като L, M и K лежат съответно на страните AC, AB и BC.

а) Докажете, че $\frac{CL}{AC} + \frac{AM}{AB} + \frac{BK}{BC} = 1$.

б) Докажете, че **не** е възможно и трите равенства да са едновременно изпълнени.

$$AM + PL = AL + MP \qquad PK + CL = PL + CK \qquad BK + MP = BM + PK$$

Решение. Да допуснем, че и трите равенства са изпълнени. Събирането им дава $AL + BM + CK = AM + BK + CL$. Нека $x = \frac{CL}{AC} = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}$, $y = \frac{AM}{AB} = \frac{S_{PCA}}{S_{ABC}}$ и $z = \frac{BK}{BC} = \frac{S_{PAB}}{S_{ABC}}$ – тогава $x + y + z = \frac{S_{PBC}+S_{PAC}+S_{PAB}}{S_{ABC}} = 1$. Ако означим $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, равенството с AL, BM, CK, AM, BK, CL се преобразува до $(1-x)b + (1-z)a + (1-y)c = yc + za + xb$, т.е. $(x+z)c + (y+x)a + (z+y)b = yc + za + xb$, т.е. $x(c+a-b) + y(a+b-c) + z(b+c-a) = 0$. От друга страна, x, y, z са положителни и $c + a - b$, $a + b - c$, $b + c - a$ също са, понеже a, b, c са страни на триъгълник. Следователно последното равенство е невъзможно, с което задачата е решена.

Задача 7. Едно цяло число x се нарича *созополско*, ако

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

където a, b, c и d в някакъв ред са четири последователни цели числа. Намерете всички созополски числа.

Решение. При $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$ и $d = 0$ получаваме уравнението $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ с корени $-2, -1$ и 0.

При $a=-1$, $b=1$, $c=2$ и $d=0$ получаваме уравнението $-x^3+x^2+2x=0$ с корени -1, 0 и 2.

Следователно числата $x=-2,-1,0,2$ са созополски. Ще докажем, че други созополски числа няма.

При $x=1$ получаваме $a+b+c+d=0$ за 4 последователни цели числа. Ако най-малкото от тях е n, то $a+b+c+d=4n+6=0$ и следователно n не е цяло число.

Тъй като $-a$, $-b$, $-c$ и $-d$ са също четири последователни цели числа, то можем да считаме, че $d \geq 0$.

При $x \geq 3$ от x дели d следва, че $d=0$ или $d \geq 3$. При $d=0$ можем да считаме, че $c>0$ и след съкращаване на $x \neq 0$ получаваме, че x дели c и поради $c \neq d=0$ следва, че $c \geq 3$. Следователно $d \geq 3$ или $c \geq 3$, като тогава $a,b,c,d \geq 0$, откъдето $ax^3+bx^2+cx+d>0$, противоречие.

При $x \leq -3$ за $t=|x| \geq 3$ получаваме

$$at^3+ct=bt^2+d.$$

Лесно се вижда, че това равенство е невъзможно при $t \geq 4$, а при $t=3$ както в случая $x \geq 3$ се получава противоречие.

Задача 8. Нека $4ac>b^2$ и $5a+c>b$. Докажете, че $a+4c>2b$.

Решение. Ако $f(x)=ax^2+bx+c$, то $D<0$, т.е. $f(x)$ има постоянен знак. Имаме $f(1)+f(3)=10a+2c-2b>0$, така че и $a+4c-2b=4f(-1/2)>0$.

Десети български фестивал на младите математици

Втори кръг, Тема за 8 – 9 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. На дъската са записани две естествени числа. Всяка минута към записаните вече числа се записва и сборът от четвъртите им степени. Да се докаже, че след един час на дъската ще има число с поне 118 различни прости делители.

Решение. Да означим дадените числа с a и b. Нека след i-та минута дописваме числото t_i. Ще докажем, че t_{60} има поне 118 различни прости делители.

Тъй като $t_1 = a^4 + b^4 > 1$, то t_1 има поне един прост делител. От $t_2 = t_1^4 + a^4 + b^4 = t_1^4 + t_1 = t_1(t_1^3 + 1)$ следва, че t_2 има поне 2 различни прости делители (тъй като t_1 и $t_1^3 + 1$ са взаимнопрости). Освен това $a, b \geq 1$ дава $t_2 \geq 18$.

Да забележим, че $t_{i+1} = t_i^4 + t_i = t_i(t_i + 1)(t_i^2 - t_i + 1)$. Ще докажем, че $(t_i + 1)(t_i^2 - t_i + 1)$ при $t_i > 2$ има поне два различни прости делители. Наистина, ако $(t_i + 1)(t_i^2 - t_i + 1) = p^n$, то поради НОД$(t_i + 1, t_i^2 - t_i + 1) = 1$ или 3 следва, че $p = 3$. Тогава $t_i = 3^k - 1$ за $k > 1$ и получаваме $t_i^2 - t_i + 1 = 3(3^{2k-1} - 3^k + 1)$. При $k > 1$ изразът $3^{2k-1} - 3^k + 1$ не може да бъде степен на 3, противоречие.

След втората минута всяко ново число ще има поне два прости делители повече от предишното. Следователно след 60 минути ще бъде записано число с поне $2.60 - 2 = 118$ различни прости делители.

Задача 2. Да се намерят всички двойки неотрицателни естествени числа (x, y), за които е изпълнено равенството

$$20^x - 10x^2 + 1 = 19^y.$$

Решение. Както разгледаме остатъците при деление на 10, получаваме, че y е четно число. Следователно $20^x - 10x^2 + 1$ е точен квадрат.

Както разгледаме остатъците при деление на 4, получаваме, че x е четно число; $x = 2a$.

Точният квадрат $20^{2a} - 10.4a^2 + 1$ е по-малък от $(20^a)^2$, следователно е най-много $(20^a - 1)^2$.

$$20^{2a} - 10.4a^2 + 1 \leqq (20^a - 1)^2 \iff a^2 \geqq 20^{a-1}.$$

Последното неравенство е изпълнено само за $a = 1$. Оттук получаваме единственото решение $x = y = 2$.

Задача 3. От $\dfrac{n(n+1)}{2}$ монети е съставен равностранен триъгълник. Една монета сочи тура, а всички останали сочат ези. За един ход можем да изберем две съседни монети A и B и да обърнем всики монети от правата AB. Да се намерят всички начални разположения, за които е възможно след няколко хода всички монети да сочат тура.

Решение. Всеки ход променя 0 или 2 от трите монети във върховете на триъгълника. За да можем да направим всички монети тура, единствената монета тура в началото трябва е във връх. Когато тя е във връх (например в горния връх) извършване на ходове по всички редове редове дава необходимото.

Задача 4. Четири момчета и четири момичета си разменят подаръци. Всяко момче избира по произволен начин едно момиче и му дава дава подарък. Всяко момиче избира по произволен начин едно момче и му дава дава подарък. Да се намери веорятността да се случат едновременно следните събития.

а) Всеки получава точно по един подарък.

б) Никои двама не си разменят подаръци, т.е. ако A дава подарък на B, то B не дава подарък на A.

Отговор: $\dfrac{27}{8192}$**.** Има 4^8 възможности за разпределение на подаръците. Нека момчетата са A_1, A_2, A_3, A_4, а момичетата са B_1, B_2, B_3, B_4. За да са изпълнени условията имаме или един цикъл (например $A_1-B_1-A_3-B_2-A_4-B_3-A_2-B_4-A_1$) или два цикъла (например $A_1-B_3-A_4-B_2-A_1$ и $A_2-B_1-A_3-B_4-A_2$). За два цикъла възможностите са $4.3.3.2 = 72$, а за един цикъл възможностите са $4.3.3.2.2 = 144$ и вероятността е $\dfrac{72+144}{4^8} = \dfrac{27}{8192}$.

Задача 5. Точките M и N са съответно от бедрата AC и BC на равнобедрения триъгълник ABC, като $MN > AC$. Да се докаже, че $AB > MN$.

Решение. Без ограничение на общността считаме $CM \geq CN$. Нека правата през A, успоредна на MN, пресича отсечката BN в точка K (която може да съвпада с B) и правата през M, успоредна на BC, пресича AK в точката P. Тогава $AK > PK = MN$ (тъй като $PKNM$ е успоредник) и сега условието дава $AK > AC = BC > CK$. В частност, $\sphericalangle ACK > 60^\circ$ като най-голям ъгъл в триъгълника ACK, откъдето $\sphericalangle AKB$ е най-големият ъгъл в триъгълника AKB. Така $AB > AK > MN$, както се искаше.

Задача 6. Външно за правоъгълния триъгълник ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) са построени равнобедрените правоъгълни триъгълници BCM и ACN, като $\sphericalangle BMC = \sphericalangle ANC = 90^\circ$. Правите AM и BN се пресичат в точката T, а H е петата на височината през върха C в триъгълника ABC. Да се докаже, че триъгълникът CHT е равнобедрен.

Решение. Нека CL ($L \in AB$) е ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$. Ще докажем, че AM разполовява CL. Последното е еквивалентно на $S_{AML} = S_{AMC}$, т.е. на $\frac{AL}{AB} S_{ABM} = \frac{CM}{MN} S_{AMN}$. Понеже $BM \parallel AN$, имаме $\frac{S_{ABM}}{S_{AMN}} = \frac{BM}{AN}$ и исканото сега е $\frac{AL}{AB}\frac{BM}{AN} = \frac{CM}{MN}$. Чрез $BM = CM$ свеждаме до $\frac{AL}{AL+BL} = \frac{AN}{CN+CM}$, т.е. (използвайки $AN = CN$) до $\frac{AL}{BL} = \frac{CN}{CM}$. От Питагоровата теорема имаме $CM = \frac{CB}{\sqrt{2}}$, $CN = \frac{CA}{\sqrt{2}}$, а ако LX и LY са (равните) перпендикуляри от L към AC и BC, то $\frac{BL}{AL} = \frac{S_{BLC}}{S_{ALC}} = \frac{BC.LY}{AC.LX} = \frac{BC}{AC}$. Оттук $\frac{BL}{AL} = \frac{CM}{CN}$ и разполовяването следва.

Аналогично доказваме, че BN разполовява CL и следователно пресечната точка T на AM и BN е точно средата на CL. Тогава в правоъгълния триъгълник CHL с хипотенуза CL имаме $HT = \frac{CL}{2} = CT$, с което задачата е решена.

Задача 7. За всяко съставно число $n \geq 6$ нека a_n е най-малкото естествено число k, такова че $k!$ се дели на n. Определете най-голямата възможна стойност на $\frac{a_n}{n}$.

Отговор: $\frac{2}{3}$**.** Ако $n = p^2$, където $p \geq 3$ е просто, то $a_n = 2p$ и $\frac{2p}{p^2} \leq \frac{2}{3}$ с равенство за $p = 3$. Ако $n = p^k$, $k \geq 3$, то p^k дели $p^{\frac{k(k-1)}{2}} = p.p^2.p^3.\cdots.p^{k-1}$ и значи $a_n \leq p^{k-1}$, което дава $\frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$. Накрая, ако n има поне два различни прости делителя, то $n = qr$ за две взаимнопрости естествени числа $q, r \geq 2$; ако без ограничение $q > r$, то $q|q!$ и $r|r!|q!$, откъдето $n = qr|q!$ и следователно $a_n \leq q$ и $\frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$.

Задача 8. Да се намери най-голямото естествено число n със следното свойство: поне една от страните на всеки изпъкнал четириъгълник с диагонали с дължина 20 сантиметра е с дължина, по-голяма от n сантиметра.

Отговор: $n = 14$**.** Квадрат с диагонал 20 има страна $10\sqrt{2} < 15$ и следователно $n \leq 14$. Ще докажем, че една от страните на всеки изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с диагонали по 20 см е по-голяма от 14 см. Да допуснем противното. Тогава точките B и D лежат в общата част на $k_1(A, 14)$ и $k_2(C, 14)$. Диагоналът BD има най-голяма дъбжина когато B и D съвпадат с пресечните точки на k_1 и k_2. Тогава $BD = 2\sqrt{14^2 - 10^2} = 2\sqrt{96} < 20$, противоречие.

Десети български фестивал на младите математици

Трети кръг, Тема за 8 – 9 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. а) Съществува ли множество A от 8 естествени числа, всяко от които е по-малко от 100 и никои две подмножества на A нямат равни суми от елементите си.

б) Съществува ли множество A от 9 естествени числа, всяко от които е по-малко от 100 и никои две подмножества на A нямат равни суми от елементите си.

Отговор: а) Да. б) Не. а) $\{3, 6, 12, 24, 48, 95, 96, 97\}$ върши работа.

б) Нека числата са $x_1, \ldots, x_9$. Тогава сборовете

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_9$$

са различни, с еднаква четност и различни от 0. Тогава най-малката стойност на два от модулите на горните суми са 1 (за 1 и -1), следващите два са най-малко 3 и т.н., т.е.

$$\sum(\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_9)^2 \geq 2(1^2 + \cdots + 511^2) = 512.87381$$

От друга страна сумата по-горе е равна на

$$512(x_1^2 + \cdots + x_9^2)$$

тъй като удвоените произведения се съкращават. Следователно

$$x_1^2 + \cdots + x_9^2 \geq 87381$$

и понеже всики събираеми са по-малки от 100, получаваме, че те са не по-малки от 80. Изваждаме от всички числа по 80 и разглеждаме полученото множество от 9 числа от 0 до 20 и като разгледаме всички подмножества от по 4 елемента получаваме, че те са повече от възможно най-голямата сума от 80.

Задача 2. За всяко естествено число k нека $S(k)$ означава сбора от цифрите на k. Да се намери най-малкото естествено число n за което $S(n) - S(2n) = 2019$.

Отговор: $\underbrace{555\ldots56}_{505}$**.** Лесно се вижда, че разликата между съответните цифри на n и $2n$ е най-много 5. Ако е точно 5, то това е или цифрата на единиците, или предишната цифра е по-малка от 5. Тогава разликата между сбора на двете цифри (5 и предишната) на n и на $2n$ е не-повече от 5. Следователно ни трябва поне 505 цифрено число и лесно се вижда, че това е $\underbrace{555\ldots56}_{505}$.

Задача 3. На Математическите боеве ученици решавали 46 задачи, като всеки ученик решил точно 3 задачи. За всеки двама има най-много една задача, която е решена и от двамата. Да се докаже, че има 10 задачи, никои три от които не са решени от един ученик.

Решение. Нека t е най-голямото число със свойството: Има t задачи, никои три от които не са решени от един ученик. Да допуснем, че $t \leq 9$ и да означим множеството от тези t задачи с A. Тъй като t е най-голямото число с това свойство, за всяка задача $x \notin A$

съществуват две задачи $y, z \in A$, такива, че има ученик решил задачи x, y и z (в противен случай ще добавим задача x към A и ще увеличим t).

По този начин на всяка задача извън A съответства двойка от задачи от A. При това на различни задачи извън A съответстват различни двойки от A (в противен случай ще има ученик решил повече от 3 задачи). Тъй като $t \leq 9$, то двойките в A са най-много $\binom{9}{2} = 36$, а извън A има поне 37 задачи и от $37 > 36$ получаваме противоречие.

Задача 4. Реалните числа a, b, c, d са различни и изпълняват равенствата

$$ac = bd \quad \text{и} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4.$$

Да се намери най-голямата възможна стойност на $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}$.

Решение. От дадените имаме $(a+c)(b+d) = 4ac$. Да отбележим, че $ac = bd < 0$ – иначе, $(a+c)(b+d) = 4ac > 0$ и тогава $(a+c)(b+d) = |a+c||b+d| > 2\sqrt{ac}2\sqrt{bd} = 4ac$, противоречие (неравенството е строго, понеже a, b, c, d са различни). Сега от неравенството между средноаритметично и средногеометрично получаваме

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{ac} = \frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{ac} - 4 \leq -2\frac{(a+c)+(b+d)}{ac} - 4 = -12$$

Равенство се достига например за $a = 1$, $b = -1$, $c = -3 - 2\sqrt{2}$, $d = 3 + 2\sqrt{2}$.

Задача 5. Нека $2a + 3b + 5c = 0$. Докажете, че уравнението $ax^2 + bx + c = 0$ има корен в интервала $[0; 1]$.

Решение. Ако $f(x) = ax^2 + bx + c$, то $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4a}{9} + \frac{2b}{3} + c$ и $f(0) = c$, така че $(9/2)f(2/3) + (1/2)f(0) = 2a + 3b + 5c = 0$. Ако тук $f(2/3) \geq 0$, то $f(0) \leq 0$. Ако $f(2/3) < 0$, то $f(0) > 0$. От графиката на квадратната функция следва, че има корен в интервала $[0; 2/3]$.

Задача 6. Даден е триъгълник ABC. Точките A_1 и B_1 са от страните BC и AC съответно. Точките P и Q са от отсечките AA_1 и BB_1, като $PQ \parallel AB$. Точката P_1 е от правата PB_1, като B_1 е между P и P_1 и $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$. Точката Q_1 е от правата QA_1, като A_1 между Q и Q_1 и $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle ABC$. Правите AA_1 и BB_1 пресичат описаната около триъгълника ABC окръжност в точките A_0 и B_0, съответно. Да се докаже, че точките A_0, B_0, P, Q, P_1 и Q_1 лежат на една окръжност.

Решение. Нека $AA_1 \cap BB_1 = R$. Понеже $PQ \parallel AB$ и ABA_0B_0 е вписан четириъгълник, имаме $\sphericalangle B_0QP = 180° - \sphericalangle RQP = 180° - \sphericalangle ABB_0 = 180° - \sphericalangle PA_0B_0$ и следователно PQB_0A_0 е вписан. Също, $\sphericalangle B_1B_0C = \sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1P_1C$ и така точките B_0, B_1, P_1 и C лежат на една окръжност. Сега ако $\sphericalangle B_0P_1P = 180° - \sphericalangle B_1CB_0 = 180° - \sphericalangle ABB_0 = 180° - \sphericalangle PQB_0 = \sphericalangle B_0QP$, откъдето P, Q, P_1 и B_0 лежат на една окръжност. Аналогично P, Q, Q_1 и A_0 лежат на една окръжност, с което задачата е решена.

Задача 7. Точките P и Q от страната AB на триъгълника ABC са такива, че $\sphericalangle ACP = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle BAC$. Точките M и N са съответно от лъчите CP и CQ и изпълняват равенството $\frac{CP}{PM} = \frac{QN}{CQ}$. Да се докаже, че правите AM и BN се пресичат върху описаната около триъгълника ABC окръжност.

Решение. Нека $S = AM \cap BN$ и да означим $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACP = \beta$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCQ = \alpha$. Тогава $\triangle ACP \sim \triangle CBQ$, откъдето (използвайки и даденото)

$$\frac{AP}{PM} = \frac{\frac{CP.CQ}{QB}}{PM} = \frac{NQ}{QB}$$

Нещо повече, $\sphericalangle APM = \sphericalangle BQC = \alpha + \beta$. Следователно $\triangle NQB \sim \triangle APM$. Оттук

$$\sphericalangle ASB = 180^\circ - \sphericalangle SAB - \sphericalangle SBA = 180^\circ - \sphericalangle MAP - \sphericalangle AMP =$$

$$= \sphericalangle APM = \beta + \alpha = 180^\circ - \sphericalangle ACB$$

с което задачата е решена.

Задача 8. а) Намерете всички множества S от естествени числа със следното свойство: за всеки три числа a, b и c от S числото $\dfrac{ab+c}{(a,c)}$ също е от S.

б) Намерете всички множества S от естествени числа със следното свойство: за всеки три числа a, b и c от S, ако числото $\dfrac{ab-c}{(a,c)}$ е естествено, то също е от S.

С (a,c) означаваме най-големия общ делител на естествените числа a и c.

Решение. а) Имаме $\dfrac{ab+c}{(a,c)} \geq b+1$, като равенство се достига само при $a = c$. Следователно всички търсени множества са $S = \{n \geq t\}$, където t е фиксирано естествено число.

б) **Отговор: 1 или всички естествени числа.** При $a = c$ имаме $\dfrac{ab-c}{(a,c)} = b - 1$, т.е. ако S съдържа дадено естествено число, то S съдържа и всички по-малки от него. Ако $S \neq \{1\}$, то $2 \in S$ и тогава $a = b = 2, c = 1$ дава $3 \in S$ и т.н ще получим, че в S има произволно големи числа.

Десети български фестивал на младите математици

Четвърти кръг, Тема за 8 – 9 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Изпъкналият четириъгълник $ABCD$ е такъв, че $AC = BD = AB$. Диагоналите AC и BD се пресичат в точка O. Точките M и N са средите на страните AD и BC, съответно. Точките X, Y и Z съответно от отсечките AO, OB и AB са такива, че $AX = AZ$, $BY = BZ$ и $OX = OY$. Да се докаже, че точките M, X, Y и N лежат на една права.

Решение. От дадените равенства получаваме $DY = BD - BY = AB - BZ = AZ = AX$. Да означим $S_{AMX} = S_{DMX} = S$ и $\frac{DY}{OY} = \frac{AX}{OX} = k > 1$. Тогава $S_{AXY} = \frac{S_{AXD}}{k-1} = \frac{2S}{k-1}$, $S_{OXY} = \frac{OX}{XA} S_{AXY} = \frac{2S}{k(k-1)}$ и $S_{OXD} = (k-1)S_{OXY} = \frac{2S}{k}$. Така $S_{DXY} = S_{DXO} + S_{OXY} = \frac{2S}{k-1} = S_{AXY}$. Сега ако $W = XY \cap AD$, то $\frac{AW}{WB} = \frac{S_{AXY}}{S_{DXY}} = 1$, откъдето W е средата на AD и в частност W съвпада с M.
Следователно точките M, X и Y лежат на една права. Аналогично N, X и Y лежат на една права и исканото следва.

Задача 2. За реалните числа $0 \le a, b, c, d \le 1$ да се докаже, че

$$ab(a-b) + bc(b-c) + cd(c-d) + da(d-a) \le \frac{8}{27}$$

и да се намерят всички четворки (a, b, c, d), при които се достига равенство.

Решение. Изразът е равен на $S = (b-d)(a-c)(a+c-b-d)$. Без ограничение нека $a \ge c$. Имаме два случая:

- Нека $b \ge d$. Тогава ако $a+c-b-d \le 0$ сме готови; иначе от САСГ (по точно $xyz \le (\frac{x+y+z}{3})^3$ за $x, y, z \ge 0$) върху $a-c$, $b-d$ и $a+c-b-d$ получаваме

$$S \le \left(\frac{(b-d)+(a-c)+(a+c-b-d)}{3}\right)^3 = \left(\frac{2a-2d}{3}\right)^3 \le \frac{8}{27}$$

  като равенство се достига при $a = 1$, $d = 0$ и $a - c = b - d = a + c - b - d$, т.е. $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{3}$. Възможността $a \le c$ дава и четворката $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = 1$, $d = \frac{2}{3}$.

- Ако $b \le d$, записваме $S = (d-b)(a-c)(b+d-a-c)$ и при $a+c-b-d \ge 0$ имаме $S \le 0$ и сме готови, а иначе точно като в предишния случай получаваме $S \le \frac{8}{27}$, с равенство при $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 0$, $d = 1$ (и $a = 0$, $b = 1$, $c = \frac{2}{3}$, $d = \frac{1}{3}$ при $a \le c$).

Задача 3. Докажете, че съществува естествено число a, за което 2019 дели $338^n + a.335^n$ за всяко нечетно естествено число n и намерете най-малкото такова a.

Отговор: 674. Тъй като $2019 = 3.673$, НОД$(3; 673) = 1$, $338 \equiv 335(\pmod 3)$ и $338 \equiv 335(\pmod{673})$, условието е изпълнено точно когато 3 дели $(a+1)335^n$ и 673 дели $(a1)335^n$. Сред числата, за които $a \equiv 1(\pmod{673})$, най-малкото, за което $a \equiv 1 \pmod 3$, е 674.

Задача 4. Нека $a > 0$ и $4a + 3b + 2c > 0$. Да се докаже, че не е възможно уравнението $ax^2 + bx + c = 0$ да има два реални корена в интервала $(1, 2)$.

Решение. Да допуснем, че това се случва за корените x_1 и x_2. Разделяйки на 2 и ползвайки Виет, получаваме

$$2 - 1,5(x_1 + x_2) + x_1x_2 > 0 \Rightarrow (x_1 - 1,5)(x_2 - 1,5) > 0,25.$$

Но според допускането $|x_1 - 1,5| < 0,5$ и $|x_2 - 1,5| < 0,5$, така че получаваме абсурда $0,5.0,5 > 0,25$.

Задача 5. Дадена е квадратна таблица. *Змия с дължина* k е животно, което заема наредена последователност от k клетки, да речем $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ (в s_1 се намира главата на змията, а в s_k – нейната опашна част). Клетките трябва да са две по две различни и всеки две клетки с последователни номера имат обща страна (т.е. s_1 и s_2 имат обща страна, s_2 и s_3 също и т.н.). Ако в някой момент змията е в клетките $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ и s е незаета от змията клетка, която е съседна (по обща страна) на s_1, то змията може да се *придвижи* и да заеме клетките $(s, s_1, \ldots, s_{k-1})$ (т.е. сега главата и е в s, а опашката и – в s_{k-1}). Казваме, че змията се е *обърнала*, ако в началото заема клетките $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ и след краен брой ходове заема клетките $(s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1)$ (т.е. главата и е на s_k, а опашката – на s_1).

Определете най-голямото k, за което можем да поставим змия в таблица 3×3, която може да се обърне.

Отговор: $k = 5$**.** Да означим квадратчетата на таблицата с A, B, C на първия ред, D, E, F на втория и G, H, I на третия. При $k = 5$ поставяме змията първоначално на (A, B, C, F, E) (главата и е на A) и чрез преместванията на главата $A \to D \to G \to H \to I \to F \to E \to D \to A \to B \to C \to F \to E$ змията се обръща.
Нека сега $k \geq 6$. Ще казваме, че змията е *затисната*, ако няма незаети клетки, съседни на s_1 (клетката, в която се намира главата и). Ясно е, че ако змията е затисната, тя не може да се обърне. Оцветяваме шахматно клетките на таблицата, като E е бяла. Да забележим, че всеки две съседни клетки на змията са в различни цветове – така змия с дължина поне 6 покрива във всеки момент поне 3 черни и поне 3 бели клетки.

При всяко движение на змията, клетката, която преди е била заета от опашката (последната клетка) става празна. Да отбележим, че тази клетка не може веднага да се заеме от главата, тъй като главата трябва да заеме клетка, която преди е била незаета. Също, всеки път когато главата е на бяла клетка, при движение тя отива в черна и обратно. Понеже броят на черните клетки е 4, а змията винаги заема 3 от тях, има най-много една възможна черна клетка, в която тя може да отиде (ако всъщност няма, то змията ще е затисната). Сега да разгледаме само последователността (от глава, към опашка и накрая евентуално една празна клетка) от черни клетки. Имаме два случая:

- Ако главата е била на черна клетка, при движение последователността не се променя, тъй като всяка черна клетка от змията се премества с една позиция надясно (относно змията) и последната черна клетка става незаета (или е била незаета от преди).

- Ако главата е била на бяла клетка, то последната клетка (незаетата) се заема от главата, т.е. тя става в началото на последователността. Останалите черни клетки се преместват с една позиция надясно (относно змията).

Следователно последователността на черните клетки непрестанно се завърта циклично. В частност, никога не може да се случи тя да стане в обратен ред (спрямо някое предишно положение), което обаче е необходимо, за да може змията да се обърне. Противоречие.

Задача 6. В правоъгълния $\triangle ABC$ с прав ъгъл при върха C е вписана окръжност, която допира катетите BC, CA и хипотенузата AB съответно в точки M, N и P. Да се докаже, че пресечната точка на височините на $\triangle MNP$ лежи на височината CD на $\triangle ABC$.

Задача 7. Да се докаже, че за всяко естествено число n числото

$$\frac{(4n)!(6n)!(9n)!(24n)!}{(2n)!(3n)!(8n)!(12n)!(18n)!}$$

е естествено.

Решение. Известен факт е, че най-високата степен на просто число p, деляща m, е с показател $\sum_{i=1}^{\infty}\lfloor\frac{m}{p^i}\rfloor$ и следователно е достатъчно да докажем неравенството

$$\lfloor 4x\rfloor+\lfloor 6x\rfloor+\lfloor 9x\rfloor+\lfloor 24x\rfloor-\lfloor 2x\rfloor-\lfloor 3x\rfloor-\lfloor 8x\rfloor-\lfloor 12x\rfloor-\lfloor 18x\rfloor\geq 0$$

за всяко положително реално число x. Представяйки $x=\lfloor x\rfloor+\alpha$, $\alpha\in[0,1)$ достигаме до горното неравенство, но за α. И наистина, във всеки от случаите $\alpha\in[\frac{1}{24},\frac{1}{18})$, $\alpha\in[\frac{1}{18},\frac{1}{12}),\alpha\in[\frac{1}{12},\frac{1}{9})$, $\alpha\in[\frac{1}{9},\frac{1}{8})$ и $\alpha\in[\frac{i-1}{24},\frac{i}{24})$, $i=1,4,5,6\ldots,23,24$ (скобките се смятат директно – например за $\alpha\in[\frac{1}{8},\frac{1}{6})$ те са съответно 0, 0, 1, 3, -0, -0, -1, -1, -2) исканото е изпълнено.

Задача 8. Да се намерят всички цели решения на $xy+yz+zx-xyz=2$.

<u>Десети български фестивал на младите математици</u>

Финал, Тема за 8 – 9 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. За цяло неотрицателно число a и просто число p означаваме

- $\frac{\partial a}{\partial p} = a.\frac{x}{p}$, ако $a \neq 0$, p дели a и $x \geq 1$ е такова, че p^x дели a, но p^{x+1} не дели a (с други думи, x е степента на p в разлагането на a на прости множители)
- $\frac{\partial a}{\partial p} = 0$ ако $a = 0$ или p не дели a.

Да се намерят всички естествени числа n, които изпълняват равенството

$$\frac{\partial(\frac{\partial n}{\partial 3})}{\partial 3} + \frac{\partial(\frac{\partial n}{\partial 673})}{\partial 673} = 2n$$

Отговор. $n = 3^3.673^{673}.x$, където НОД$(x, 2019) = 1$.

Решение. Представяме n като $n = 3^{3^a 673^b c_1} 673^{3^c 673^d c_2} x$ за цели $a, b, c, d, c_1, c_2 \geq 0, x \geq$
Тогава
$\frac{\partial n}{\partial 3} = 3^{a-1+3^a 673^b c_1} 673^{b+3^c 673^d c_2} c_1 x$ и $\frac{\partial(\frac{\partial n}{\partial 3})}{\partial 3} = (a - 1 + 3^a 673^b c_1) 3^{a-2} 673^b c_1 n$. Аналогично получаваме $\frac{\partial(\frac{\partial n}{\partial 673})}{\partial 673} = (d-1+3^c 673^d c_2) 3^c 673^{d-2} c_2 n$. Заместване и съкращаване на n в даденото уравнение дава

$$(a - 1 + 3^a 673^b c_1) 3^{a-2} 673^b c_1 + (d - 1 + 3^c 673^d c_2) 3^c 673^{d-2} c_2 = 2$$

Имаме следните случаи:

- Ако $a \geq 2$ (или $d \geq 2$), то първото (или второто) събираемо е по-голямо от 2 за ненулево c_1 (ненулево c_2) поради множителят $(a - 1 + 3^a 673^b c_1)$ (съответно $(d - 1 + 3^c 673^d c_2)$). Нека $c_1 = 0$, т.е. $(d-1+3^c 673^d c_2) 3^c 673^{d-2} c_2 = 2$. Както по-горе, $d \geq 2$ дава $c_2 = 0$, което е невъзможно. При $d = 1$ получаваме $3^{2c} c_2^2 = 2$, невъзможно. При $d = 0$ свеждаме до $t(t-1) = 2.673^2$, където $t = 3^c c_2$; последното е невъзможно, например от еквивалентното $(2t - 1)^2 = 8.673^2 + 1$ и това, че числото в дясната страна завършва на 3. Възможността $c_2 = 0$ се отхвърля аналогично.
- Ако $a = d = 1$, получаваме $673^{2b} c_1^2 + 3^{2c} c_2^2 = 2$ и значи $b = c = 0$, $c_1 = c_2 = 1$. Това съответства точно на $n = 3^3.673^{673}.x$.
- Нека $a = d = 0$. След освобождаване от отрицателни степени достигаме до

  $$(673^b c_1 - 1) 673^{b+2} c_1 + (3^c c_2 - 1) 3^{c+2} c_2 = 2.2019^2$$

  Сега е ясно, че непременно $(3^c c_2 - 1) c_2 = k.673^2$ за цяло неотрицателно число k. Ако $k > 0$, то $(3^c c_2 - 1) 3^{c+2} c_2 \geq k.3^c.2019^2$ дава $c = 0$ и $k \leq 2$ – обаче $c_2(c_2 - 1) = 673^2$ и $c_2(c_2 - 1) = 2.673^2$ са невъзможни, например от еквивалентните $(2c_2 - 1)^2 = 4.673^2 + 1$, $(2c_2 - 1)^2 = 8.673^2 + 1$ и това, че числата в десните страни завършват на 7 и 3, съответно.

  Следователно $k = 0$ и значи $(673^b c_1 - 1) 673^{b+2} c_1 = 2.2019^2$. Съкращаване на 673^2 дава $(673^b c_1 - 1) 673^b c_1 = 2.3^2$ и така $b = 0$ и $c_1(c_1 - 1) = 18$, т.е. $(2c_1 - 1)^2 = 73$, което е невъзможно.

- Сега разглеждаме $a=0$, $d=1$, т.е. $\frac{(673^b c_1-1)673^b c_1}{9}+3^{2c}c_2^2=2$. Ако $c_2=0$, подхождаме както в края на предишния случай. Иначе $3^{2c}c_2^2>2$ освен само при $c_2=1$, $c=0$. В такъв случай, $(673^b c_1-1)673^b c_1=9$ – но лявата страна е четна, като произведение на две последователни цели числа.

- Остава да отхвърлим $a=1$, $d=0$, т.е. $673^{2b}c_1^2+\frac{(3^c c_2-1)3^c c_2}{673^2}=2$. Непременно имаме $b=0$, $c_1=0$ или 1, като и двете отпадат както в края на предишния случай.

Задача 2. На тест се явили $2n$ ученици. Възможните резултати са 0, 1, ..., 10, като всеки резултат се среща поне веднъж. Средноаритметичното от резултатите се оказало $\frac{36}{5}$. Да се докаже, че можем да сформираме две групи от по n ученици, като средноаритметичният резултат измежду хората във всяка група е $\frac{36}{5}$.

Решение. Нека a_1, a_2, ..., a_{2n} са резултатите в ненамаляващ ред. Означаваме $s_i=\sum_{j=i+1}^{i+n}a_j$ за $i=0,\dots,n$. Тогава $s_0\le\ldots\le s_n$ и $s_0+s_n=\sum_{j=1}^{2n}a_j=\frac{36}{5}n$ и значи $s_0\le\frac{73}{10}n\le s_n$. Нека i е най-големият индекс, за който $s_i\le\frac{36}{5}n$. Имаме $i<n$, иначе $s_0=s_n=\frac{36}{5}$ и $a_1=\ldots=a_{2n}=\frac{36}{5}$, противоречие. Значи $\frac{36}{5}n-s_i<s_{i+1}-s_i=a_{i+n+1}-a_i$ и

$$a_i<s_i+a_{i+n+1}-\frac{36}{5}n\le a_{i+n+1}$$

Понеже всеки от възможните резултати се среща поне веднъж (а значи и $M=s_i+a_{i+n+1}-\frac{36}{5}n$), можем да изберем числата $a_{i+1},\dots,a_{i+n+1}$ и да премахнем точно едно от тях, което е равно на M. Средноаритметичното е точно $\frac{a_{i+1}+\ldots+a_{i+n+1}-M}{n}=\frac{36}{5}$ и сега е ясно, че останалите n резултата ще са със същото средноаритметично.

Задача 3. Естествено число се нарича *свободно от квадрати*, ако не се дели на квадрата на кое да е просто число. Нека n е естествено число. Да се докаже, че сумата на числата от вида $\lfloor\sqrt{\frac{n}{a}}\rfloor$, където a е свободно от квадрати, е равна на n.
(*За реално число x с $\lfloor x\rfloor$ означаваме най-голямото цяло число, по-малко или равно на x*)

Решение. Индукция по n.

Задача 4. Даден е успоредник $ABCD$ с $AB<AC<BC$. Точките M и N от описаната около триъгълника ABC окръжност k са такива, че DM и DN се допират до k и отсечките AD и CM се пресичат. Ако $\sphericalangle ABN=\sphericalangle DCM$, да се намери $\sphericalangle ABC$.

Отговор. 60°

Решение. Тъй като D е външна за k, ъгълът $\sphericalangle ABC$ е остър. Нека A' е втората пресечна точка на CD и k. Понеже $BC>AC$, имаме $\sphericalangle DCA=\sphericalangle CAB>\sphericalangle CBA=DA'A$; значи C е между A' и D. Нататък, чрез ъгли в k и условието получаваме, че дъгите MCA' и ACN са равни. Нататък, нека l е ъглополовящата на $\sphericalangle MDN$. Тъй като DM и DN са допирателни, правата l минава през центъра O на k. Поради равенството на гореспоменатите дъги, при симетрия относно l точката A се изобразява в A' – в частност, $\sphericalangle DAA'=\sphericalangle DA'A$. Сега $\sphericalangle DAA'=\sphericalangle DA'A=\sphericalangle ABC=\sphericalangle ADC$ и значи триъгълникът $AA'D$ е равностранен. Отговорът следва.

Задача 5. Да се определи най-голямата стойност на израза

$$(x_2x_3+x_4x_5+\ldots+x_{2n-2}x_{2n-1}+x_{2n}x_1)-(x_1x_2+x_3x_4+\ldots+x_{2n-3}x_{2n-2}+x_{2n-1}x_{2n})$$

където x_i, $i=1,2,\dots,2n$ са реални числа от интервала $[0,1]$, ако:
а) $n=2$ б) $n=3$

Решение. а) Изразът е равен на $(x_2 - x_4)(x_3 - x_1)$ и сега е ясно, че максимумът е 1.

б) Ще докажем, че и тук максимумът е 1. Стойността се достига например при $x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = x_6 = x_1 = x_5 = 0$.
Интересуваме се от $x_2(x_3 - x_1) + x_4(x_5 - x_3) + x_6(x_1 - x_5)$. Ако $x_1 = x_3 = x_5$, получаваме стойност 0. Иначе $x_1 \geq x_3 \geq x_5 \geq x_1$ не е възможно – нека без ограничение $x_1 < x_3$. Чрез $0 \leq x_2 \leq 1$ получаваме, че даденият израз е не по-голям от

$$x_3 - x_1 + x_4(x_5 - x_3) + x_6(x_1 - x_5)$$

Сега ако $x_5 \geq x_3$, то $x_4(x_5 - x_3) \leq x_5 - x_3$ и горното е не повече от $(x_6 - 1)(x_1 - x_5)$, което е не повече от 1, тъй като всеки от двата множителя е между -1 и 1.
При $x_5 < x_3$ имаме $x_4(x_5 - x_3) \leq 0$ и свеждаме до $x_3 - x_1 + x_6(x_1 - x_5) = x_3 + x_1(x_6 - 1) - x_6 x_5$. Чрез $(-x_6 x_5) \leq 0$ и $x_1(x_6 - 1) \leq 0$ последното е не повече от $x_3 \leq 1$.

Забележка. За произволно n отговорът е $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Задача 6. а) Да се докаже, че за всяко естествено число $n \geq 4$ е изпълнено неравенството

$$(n(n-1))! > 3^{n^2}$$

б) Да се докаже, че за всяко естествено число m е изпълнено равенството

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^m} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^m\right)$$

в) Да се реши в естествени числа уравнението

$$k! = (3^n - 3^0)(3^n - 3^1)(3^n - 3^2) \cdots (3^n - 3^{n-1})$$

Решение. а) Разсъждаваме индуктивно по n. Случаите $n = 4$, $n = 5$ се проверяват директно. Сега ако допуснем за някое $n \geq 5$, то от $n^2 - n + m > 3^2$ за всяко $m = 0, 1, \ldots, 2n - 1$ и $n^2 + n > 3^3$ получаваме

$$(n(n+1))! = (n(n-1))!(n^2-n+1)(n^2-n+2)\cdots(n^2+n) > 3^{n^2}(n^2-n+1)(n^2-n+2)\cdots(n^2+n)$$

$$> 3^{n^2}.3^{2(n-1)}.3^3 = 3^{n^2+2n+1} = 3^{(n+1)^2}$$

с което индукцията е завършена.

б) Индукция по m. Случаят $m = 1$ е очевиден. Ако допуснем за m, то исканото следва от очевидното

$$\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^m\right) + \frac{1}{3^{m+1}} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}\right)$$

в) Да забележим първо, че от $3^n - m < 3^n$ за $m > 0$ следва $k! < (3^n)^n = 3^{n^2}$.
От друга страна, имаме

$$k! = 3^{(1+2+\ldots+n-1)}(3^n - 1)(3^{n-1} - 1)(3^{n-2} - 1)\cdots(3 - 1) =$$

$$= 3^{\frac{n(n-1)}{2}}(3^n - 1)(3^{n-1} - 1)(3^{n-2} - 1)\cdots(3 - 1)$$

т.е. степента на числото 3 в разлагането на $k!$ на прости множители е $\frac{n(n-1)}{2}$. Тази степен обаче е и не повече от $\frac{k}{3} + \frac{k}{9} + \cdots + \frac{k}{3^m}$ където m е най-голямата степен на 3, която е по-малка от k, и от б) е по-малка от $\frac{k}{2}$. В частност, непременно $3^{n^2} > k! > (n(n-1))!$ и сега от а) следва, че $n \leq 3$. Сега директна проверка на $n = 1, 2, 3$ дава единственото решение $k = 2$, $n = 1$.

Задача 7. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC$) със среда M на страната AB. Точката P е такава, че $CP \parallel AB$ и $PA < PB$. Точките $X \in PA$ и $Y \in PB$ са такива, че A е между P и X, B е между P и Y и $\sphericalangle PXM = \sphericalangle PYM$. Да се докаже, че точките C, P, X и Y лежат на една окръжност.

Решение. Нека точката Q от лъча CM е такава, че $\sphericalangle AXQ = 90^\circ$. Очевидно $AMQX$ е вписан, откъдето $\sphericalangle BYM = \sphericalangle AXM = \sphericalangle AQM = \sphericalangle BQM$ (последното е понеже Q е от симетралата на AB) и значи $BMQY$ е вписан. Така $\sphericalangle BYQ = 90^\circ$ и точките C, P, X и Y лежат на една окръжност (тази с диаметър PQ), както се искаше.

Задача 8. На лист хартия са отбелязани 100 точки. За всеки две от тях или е построена, или не е построена, отсечката, която ги свързва, като всяка от точките принадлежи на точно три построени отсечки. Вярно ли е, че при всеки възможен избор на точките и отсечките можем да оцветим отсечките (без техните краища) в три цвята така, че всеки две отсечки с общ край да са в различен цвят?

Отговор. Не.

Решение. Ще покажем, че контрапример е 10 независими копия на графът на Петерсен, разглеждайки всяко копие поотделно. Ясно е, че външният 5-цикъл $A_1A_2A_3A_4A_5$ не може да се оцвети в два цвята и лесно се проверява, че всички оцветявания на цикъла в три цвята са еквивалентни (т.е. от всяко се получава всяко друго, чрез размяна на цветовете и преномериране на върховете). Тогава нека без ограничение A_1A_2 и A_3A_4 са червени, A_2A_3 и A_4A_5 са сини, а A_5A_1 е зелена. Ако вътрешната част е $B_1B_2B_3B_4B_5$ (като A_iB_i за $i = 1, \ldots, 5$ са ребра на графа), то A_1B_1 е синя, A_2B_2, A_3B_3 и A_4B_4 са зелени и A_5B_5 е червена. Но тогава B_3B_5 и B_2B_5 са непременно сини, противоречие.