Десети български фестивал на младите математици

Първи кръг, Тема за 10 – 12 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Дефинираме редицата $a_n = (2n)^2+1$ за всяко естествено число n. Ще наричаме едно естествено число n *лошо*, ако не съществуват естествени числа $a > 1$ и $b > 1$, такива че $a_n = a^2+b^2$. Да се докаже, че естественото число n е лошо тогава и само тогава, когато a_n е просто число.

Решение. Първо нека a_n е просто число и да допуснем, че $p = (2n)^2 + 1 = a^2 + b^2$. Тогава $(p-1)a^2 = (p-b^2)(2n)^2$, следователно $p|a^2 - (2bn)^2$, т.е $p||a-2bn|$ или $p|a+2bn$. От друга страна

$$p^2 = ((2n)^2 + 1)(a^2 + b^2) = (a - 2bn)^2 + (b + 2an)^2,$$

което означава, че ако $p|a - 2bn$, то $a = 2bn$. Значи $p = b^2((2n)^2 + 1) = b^2p$, тоест $b = 1$, противоречие. Ако пък $p|a + 2bn$, то получаваме, че $p|2an - b$ и оттук довършваме аналогично на предишния случай.
Сега нека a_n е съставно и нека p е негов прост делител. Ясно е, че всеки прост делител на a_n дава остатък 1 по модул 4 и следователно се представя като сума на два квадрата. От тъждеството на Лагранж следва, че всеки делител на a_n се представя като сума на два квадрата.
Нека $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (2n)^2 + 1$, където всеки от двата множителя отляво е по-голям от 1. Без ограничение на общността можем да приемем, че всяко от a, b, c и d е естествено, защото ако някое е равно на 0, то ще получим второ представяне на a_n. Тогава $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (2n)^2 + 1$ и ако допуснем, че a_n има еднозначно представяне, то БОО $ad - bc = 1$ и аналогично $ac - bd = \pm 1$. Ако $ad - bc = ac - bd$, то $(a + b)(c - d) = 0$, тоест $c = d$, което е противоречие с четността на a_n. Ако пък $ac - bd + ad - bc = 0$, то $a = b$ и отново получаваме така желаното противоречие.

Задача 2. В едно училище учат момчета и момичета. Група от момчета се нарича *общителна*, ако всяко момиче познава поне едно момче от тази група. Група от момичета се нарича *общителна*, ако всяко момче познава поне едно момиче от тази група. Ако броят на общителните групи от момчета е нечетен, докажете, че броят на общителните групи от момичета е също нечетен.

Решение. За всяко подмножество X на момчетата да означим с $Y(X)$ множеството от всички момичета, които не познават нито едно момче от X. Казваме, че X и Y са разделени. Аналогично, за всяко подмножество Y на момичетата да означим с $X(Y)$ множеството от момчетата, които не познават нито едно момиче от Y. Ясно е, че X и Y са разделени тогава и само тогава, когато Y и X са разделени.

Ако B е множеството от момчетата, то в сумата $\sum\limits_{X \subset B} 2^{Y(X)}$ броят на единиците е равен на броя на общителните групи от момчета, а всички други събираеми са четни числа. Поради горните разсъждения същото число броят на единиците в същата сума е равен и на броя на общителните групи от момичета, откъдето следва и твърдението на задачата.

Задача 3. Симетралата на страната AB на остроъгълния $\triangle ABC$ пресича страната BC и продължението на страната AC съответно в точки P и Q, а точките M и N са среди съответно на страната AB и отсечката PQ. Ако правите AB и CN се пресичат в точка D, да се докаже, че $\triangle ABC$ и $\triangle BCM$ имат общ ортоцентър.

Решение. Нека точка H е ортоцентъра а $\triangle ABC$. Описваме окръжност около $\triangle ABC$ и нека правата HM пресича описаната окръжност в точка K.

От учебника знаем, че CC_0 е диаметър на описаната окръжност, а от друга страна $\triangle ABH$ и $\triangle CPQ$ са с взаимно перпендикулярни страни и следователно двете им съответни медиани HM и CN са също взаимно перпендикулярни, т.е. отсечката MK е височина в $\triangle DMC$. Отсечката CH е втората височина в същия триъгълник и следователно точката H е ортоцентър и на $\triangle DCM$.

Задача 4. Диагоналите AC и BD на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка M. Ъглополовящата на $\sphericalangle ACD$ пресича лъча BA в точка K. Ако

$$MA.MC + MA.CD = MB.MD$$

докажете, че $\sphericalangle BKC = \sphericalangle CDB$.

Решение. Нека N е пресечната точка на правите CK и BD. За $\triangle MCD$ имаме:

$$CD = \frac{MC.DN}{MN}.$$

Тогава

$$MB.MD = MA.MC + MA.\frac{MC.DN}{MN} = MA.MC.\frac{MD}{MN}$$

или $MA.MC = MB.MN$. Тъй като M е от вътрешността на $ABCN$ получаваме, че точките A, B, C и N лежат на една окръжност. Следователно

$$\sphericalangle KBD = \sphericalangle ABN = \sphericalangle ACN = \sphericalangle NCD = \sphericalangle KCD,$$

т.е. K, B, C и D лежат на една окръжност. Оттук $\sphericalangle BKC = \sphericalangle CDB$, което трябваше да се докаже.

Задача 5. Докажете, че съществува естествено число a, за което 999 дели $2^{5n} + a.5^n$ за всяко нечетно естествено n и намерете най-малкото такова a.

Отговор: 593. Тъй като $999 = 27.37$, НОД$(27;37) = 1$, $32 \equiv 5 \pmod{27}$ и $32 \equiv 5 \pmod{37}$, условието е изпълнено точно когато 27 дели $(a+1)5^n$ и 37 дели $(a1)5^n$. Сред числата, за които $a \equiv 1 \pmod{37}$, най-малкото, за което $a \equiv -1 \pmod{27}$ е 593.

Задача 6. Да се намерят всички нечетни естествени числа n, за които броят на естествените числа, по-малки или равни на n и взаимнопрости с n, дели $n^2 + 3$.

Отговор: $n = 1, 3, 5, 9, 21$. Първо ще докажем следната:

Лема. Ако p е просто число от вида $3k+2$ и дели a^2+ab+b^2 за цели a и b, то непременно p дели a и b.

Доказателство. Ако p дели a, то очевидно p дели b и обратно. Да допуснем, че p не дели нито a, нито b. Явно $a^3 \equiv b^3 \pmod{p}$ и след повдигане на двете страни на степен $\frac{p+1}{3}$ получаваме $a^{p+1} \equiv b^{p+1} \pmod{p}$. От теоремата на Ферма сега следва $a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$, съответно $a \equiv \pm b \pmod{p}$ и значи a^2 или $3a^2$ се дели на p, което е невъзможно. С това лемата е доказана.

Връщаме се в главната задача. Случаят $n = 1$ е ясен. Ако n е просто, то $\varphi(n) = n - 1$ дели $n^2 + 3 = (n-1)(n+1) + 4$, т.е. $n - 1$ дели 4 и получаваме решенията $n = 3, 5$. Нека n

е съставно. Понеже $\varphi(n)$ е четно за $n \geq 3$, непременно n е нечетно. Ако n има k различни прости делителя, то $\varphi(n)$ се дели на 2^k, откъдето 2^k дели n^2+3 и $k \leq 2$ (понеже 8 не дели n^2+3). Нататък, ако за някое i имаме $\alpha_i \geq 2$ (α_i е каноничната степен на p_i), то съответното p_i дели $\varphi(n)$, т.е. p_i дели n^2+3, откъдето $p_i = 3$. Понеже 9 не дели n^2+3, в този случай имаме $\alpha_i = 2$. Следователно имаме следните случаи – $n = 9$ (това е решение), $n = 9p$ за някое просто $p \neq 3$ и $n = pq$ за прости $p \neq q$.

Ако $n = 9p$, то $\varphi(n) = 6(p-1)$, $n^2+3 = 81(p-1)(p+1)+84$, откъдето $3(p-1)$ дели 84, $p-1$ дели 28 и $p = 5$ или $p = 29$. И в двата случая 8 трябва да дели $\varphi(n)$, противоречие. Нека $n = pq$ за прости $p \neq q$. Ако $q = 3$, то $\varphi(n) = 2(p-1)$ дели $n^2+3 = 9(p-1)(p+1)+12$, т.е. $2(p-1)$ дели 12 и (чрез $p = 7$) получаваме решението $n = 21$. Нека $p, q > 3$ – тогава 3 не дели n^2+3, откъдето 3 не дели $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$. Оттук следва, че p и q дават остатък 2 по модул 3, откъдето $p = 2a+1$, $q = 2b+1$ за някои $a \equiv b \equiv 2 \pmod 3$. Тогава $\varphi(n) = 4ab$ дели $n^2+3 = 4ab(4ab+1)+4(a^2+b^2+a+b+1)$, т.е. ab дели $a^2+b^2+a+b+1$. Остава да съобразим, че ако r е прост делител на b от вида $3k+2$ (такъв има, иначе $b \equiv 1 \pmod 3$), то r дели a^2+a+1. Лемата дава, че r дели 1, противоречие.

Задача 7. За положителните реални числа a, b и c е изпълнено равенството $abc = 8$. Докажете неравенството

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}.$$

Решение. Като използваме неравенството $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}} \geq \dfrac{2}{2+x^2}$ получаваме, че лявата страна е $\geq$ от:

$$\frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)} + \frac{4b^2}{(2+b^2)(2+c^2)} + \frac{4c^2}{(2+c^2)(2+a^2)}.$$

След привеждане под общ знаменател, получаваме, че горният израз е $\geq$ от:

$$\frac{2S(a,b,c)}{36+S(a,b,c)} = \frac{2}{1+\frac{36}{S(a,b,c)}}$$

за $S(a,b,c) = 2(a^2+b^2+c^2)+(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2$. След прилагане на неравенството между средноаритметично и средногеометрично за $a^2+b^2+c^2$ и $(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2$ получаваме исканото.

Задача 8. Краен или безкраен е броят на степените на двойката със сума от цифрите по-малка от 2019^{2019}?

Решение. Ще докажем, че числата от желания вид са краен брой. Нека M е множеството от тези числа. Да допуснем противното, т.е M е безкрайно. Тогава съществува цифра a_0, на която завършват безбройно много числа от M, цифра a_1, за която безбройно много членове от M завършват на $\overline{a_1a_0}$ и т.н можем да построим безкрайна редица $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$, за която безкрайно много от числата в M завършват на $\overline{a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0}$ за всяко $k = 0, 1, \ldots$. Т.к сумата на всяко число от M е ограничена, то съществува N, такова че $a_k = 0$ за всяко $k > N$. Нека сега $2^m \in M$ е едно от числата, завършващи на $\overline{a_{N+t}\ldots a_0}$ за някое естествено число t. Тогава $2^m = 10^{N+t}.A + \overline{a_N\ldots a_0}$ за някое естествено число A. Следователно $2^{N+t}|\overline{a_N\ldots a_0}$ за произволно естествено число t, което означава, че $\overline{a_N\ldots a_0} = 0$, но това е невъзможно, защото $(5, 2^m) = 1$.

Десети български фестивал на младите математици

Втори кръг, Тема за 10 – 12 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. В турнир по футбол участвали 5 отбора, като всеки два отбора изиграли по една среща помежду си. За победа се дават 5 точки, а за загуба – 0 точки. При равен резултат без голове двата отбора получават по 1 точка, а при равенство с голове двата отбора получават по 2 точки. В крайното класиране точките на петте отбора са пет последователни цели числа. Определете колко най-малко гола са отбелязани в турнира.

Отговор: 6.

Задача 2. В $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ACB = 135^\circ$ са избрани точки M и N на страната AB, така че $\sphericalangle MCN = 90^\circ$. Отсечките и NQ са ъглополовящи съответно в $\triangle AMC$ и $\triangle NBC$. Да се докаже, че симетричната точка на върха C спрямо правата Q лежи на правата AB.

Решение. През върха C построяваме права, която пресича правата AB в точка D и $\sphericalangle ACM = \sphericalangle DCA$.

Отсечките CA и MP са ъглополовящи в $\triangle DAM$ и следователно DP също е ъглополовяща. Отсечките NQ и CQ са външни ъглополовящи в $\triangle DNC$ (пресметнете) и следователно DQ е ъглополовяща. Щом DQ е ъглополовяща симетричната точка K на върха C лежи на другото рамо AB на $\sphericalangle CDB$.

Задача 3. На 365 картички са написани 365 различни числа. За едни въпрос можем да изберем три картички и да разберем на коя картичка е записано най-голячото число и на коя – най-малкото. Възможно ли е с 2000 въпроса картичките да се наредят според големината на записаните върху тях числа?

Отговор: Да. Да допуснем, че сме наредили n картички по големина. За да намерим мястото на $n+1$-та картичка x избираме такива две картички a и b от вече наредените, които разделят останалите картички на три приблизително равни групи. Въпрос за a, b и x определя положението на x в едната от трите групи. За новата група можем да постъпим по същия начин. При тази стратегия за всяко $n \le 200$ броят въпроси е най-много 5, а при $n \le 300$ броят въпроси е най-много 6. Общо $5.200 + 6.165 = 1990 < 2000$ въпроса.

Задача 4. За четириъгълник $ABCD$ са дадени $\sphericalangle CBD = 2 \sphericalangle ADB$, $\sphericalangle ABD = 2 \sphericalangle CDB$ и $AB = CB$. Докажете, че $AD = CD$.

Решение. Нека $x = \sphericalangle ADB$ и $y = \sphericalangle CDB$, като тогава $\sphericalangle CBD = 2x$ и $\sphericalangle ABD = 2y$. От синусовата теорема за $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$ следва

$$\frac{\sin(2y+x)}{\sin x} = \frac{BD}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{\sin(2x+y)}{\sin y}.$$

Стандартни разсъждения дават $x = y$, откъдето $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$. Следователно $ABCD$ е симетричен спрямо BD, откъдето $AD = CD$.

Задача 5. Нека A е броят на 2019-цифрените числа, съдържащи точно две различни цифри. Пресметнете степента на множителя 3 в разлагането на прости множители на A.

Отговор: 5. Ако сред цифрите има 0, има 9 избора за другата цифра a, участваща в числото. За първата позиция на числото има един избор, а за всяка следваща Ц по два (общо 22018 избора), като трябва да се изключи числото, в което участва само a. Общо $9.(2^{2018}-1)$ числа. Ако 0 липсва, има $9.8:2!=36$ избора за ненаредената двойка цифри, участващи в числото. За всяка позиция има по 2 избора (общо 2^{2019} избора), от които трябва да се изключат числата, в които участва само една от тези цифри (2 избора). Общо $36.2.(2^{2018}-1)$ числа. И така, $A=(9+36.2)(2^{2018}-1)=81(2^{2018}-1)$ числа. Остатъкът при деление на 9 на 26 е 1, така че на $2^{2018}=(2^6)^{336}.2^2$ е 4, следователно $2^{2018}-1$ се дели на 3, но не и на 9. Тъй като $81=3^4$, отговорът на задачата е $4+1=5$.

Задача 6. Дадени са n деца. От всеки две поне едното е изпратило СМС на другото. За всяко дете A, сред децата, на които A е изпратило СМС, точно 10% са изпратили СМС на A. Колко са възможните трицифрени n?

Отговор: 94. Ако има k двойки деца с двупосочна комуникация, то общият брой СМС е $10k+10k=20k$. Тогава броят двойки деца е $\dfrac{n(n-1)}{2}=19k$ Това е възможно само ако n дава остатък 0 или 1 при деление на 19. За да получим $n=19m+1$, подреждаме децата по окръжност и нека всяко прати СМС на $10m$-те деца вляво от него (и значи от тях ще му пратят СМС m-те най-далечни). За $n=19m$ нека детето X не изпраща СМСи. Останалите деца подреждаме по окръжност и всяко праща СМС на $10m-1$-те вляво от него и на X (и значи получава СМС от m-те най-далечни по окръжността). Има 94 трицифрени числа, даващи остатък 0 или 1 при деление на 19.

Задача 7. Даден е двуделен граф G, най-голямата степен на връх в който е 2019. Разглеждаме най-малкото естествено число m, за което можем да оцветим ребрата на G в m цвята, като всеки две ребра с общ връх са в различен цвят. Да се докаже, че m не зависи от G и да се намери стойността на m.

(*Граф G е двуделен, ако множеството от върховете му $V(G)$ може да се разбие на множества V_1 и V_2 така, че да няма ребра между върхове от V_1 и да няма ребра между върхове от V_2.*)

Отговор: 2019. Да положим $D=2019$. Първо, ребрата на връх от степен D са D на брой и са непременно в различни цветове, откъдето $m\geq D$. За да докажем, че D цвята са достатъчни, разглеждаме два случая:

- G е D-регулярен, т.е. всеки връх е от степен D. Ако $V(G)=V_1\cup V_2$, където няма ребра между върхове от V_1 и върхове от V_2, то общият брой ребра в G е $D|V_1|=D|V_2|$ – в частност $|V_1|=|V_2|$. Също, за всяко $S\subset V_1$ имаме $D|S|=\sum_{v\in S}\deg(v)\leq D|\Gamma(S)|$, където $\Gamma(S)$ е множеството от съседите на S – оттук $|\Gamma(S)|\geq|S|$ и значи от теоремата на Хол G притежава множество M от $|V_1|$ ребра без общи върхове. Сега е ясно, че от всеки връх излиза точно едно ребро от M. Да оцветим ребрата на M в цвят 1 и след това да ги премахнем – получаваме $(D-1)$-регулярен граф и повтаряйки индуктивно същата процедура, получаваме исканото оцветяване в D цвята.

- Иначе за минималната степен δ на връх имаме $\delta<D$. Ще построим двуделен граф G', който съдържа G и е с максимална степен D и минимална степен $\delta+1$ (и прилагайки тази конструкция $D-\delta$ пъти ще достигнем до регулярен граф и тогава се връщаме в първия случай).
  Ако върховете в частите на двуделния G са $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ и $\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$, то нека G' е с върхове $L':=L\cup\{u'_1,u'_2,\ldots,u'_m\}$ в лявата част, $R':=R\cup\{v'_1,v'_2,\ldots,v'_n\}$ в дясната част. Ребрата първоначално нека са тези на G, както и $\{u'_iv'_j: u_iv_j \text{ е ребро на } G\}$ – тогава $\deg(u_i)=\deg(u'_i)$, $\deg(v_j)=\deg(v'_j)$. Сега добавяме още две множества от

ребра: $\{u_i u_i' : \deg(u_i) < D\}$ и $\{v_j v_j' : \deg(v_i) < D\}$. С това завършваме конструкцията и директно се проверява, че G' е с исканите условия.

Задача 8. Да се реши в цели числа уравнението

$$4n^4 + 7n^2 + 3n + 6 = m^3.$$

Отговор: Няма решение. Третите степени дават остатък $-1, 0, 1$ по модул 9, а $4n^4 + 7n^2 + 3n + 6$ дава остатък $-4, -3$ или 2, противоречие.

Десети български фестивал на младите математици

Трети кръг, Тема за 10 – 12 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Дадени са прости числа p_1, p_2, p_3 и p. Да се докаже, че съществуват цели числа x и y такива, че $y^2 \equiv p_1x^4 - p_1p_2^2p_3^2 \pmod p$.

Решение. Случаите $p \in \{p_1, p_2, p_3\}$ се проверяват лесно, така че нека $p \neq p_i$ за $i = 1, 2, 3$. За удобство, ще пишем $P = p_2p_3$ и обичайното означение $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ за символа на Льожандър. В случай, че P или $-P$ е квадратичен остатък по модул p, можем да изберем $y = 0$ и подходящо x. Вече ще считаме, че и двете са квадратични неостатъци – в частност, от мултипликативността на символа следва $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$.

Ако $\left(\frac{p_1}{p}\right) = 1$ избираме $x = 0$ и съответното y, така че нека $\left(\frac{p_1}{p}\right) = -1$. Следователно остава да докажем, че за някое x точно едно от $x^2 \pm P$ е квадратичен остатък по модул p. Да допуснем противното, т.е. $\left(\frac{x^2-P}{p}\right) = \left(\frac{x^2+P}{p}\right)$ за всяко x. Заместване на x с Px и използвайки мултипликативността на символа, получаваме $\left(\frac{Px^2-1}{p}\right) = \left(\frac{Px^2+1}{p}\right)$ за всяко x. Понеже P е квадратичен неостатък, следва че $\left(\frac{z-1}{p}\right) = \left(\frac{z+1}{p}\right)$ за $z = 0$ и за всеки неостатък z.

Да разгледаме множеството от квадратичните неостатъци и 0 по модул p. Мощността му е $\frac{p+1}{2} > \frac{p}{2}$ и следователно то съдържа два последователни елемента $z_0 - 1$ и z_0. Сега от горното за z индуктивно следва, че всеки остатък е 0 или неквадратичен, противоречие. С това задачата е решена.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC с център на вписаната окръжност I и пети на ъглополовящите през B и $C-$ B_1 и C_1 съответно. Нека S е средата на дъгата BAC от описаната около $\triangle ABC$ окръжност(Ω) и нека ω_A е външновписаната окръжност срещу върха A на триъгълник ABC. Нека $\omega_A(I_A)$ допира AB и AC в точки D и E съответно и нека $SI \cap \Omega = \{S, P\}$. Нека M е средата на DE и нека N е средата на SI. Ако правите MN и AP се пресичат в точка K, то да се докаже, че $KI_A \perp B_1C_1$.

Решение. За да решим задачата ще са ни необходими 2 леми.

Лема 1. Нека M_B и M_C са средите на дъгите AB и AC от Ω. Тогава N е средата на отсечката M_BM_C.

Доказателство. След пресмятане на ъгли лесно се вижда, че фигурата M_BIM_CS е успоредник, откъдето твърдението следва.

Лема 2. Нека точка O е центърът на Ω. Тогава $I_AO \perp B_1C_1$.

Доказателство. Нека X и Y са пресечните точки на радикалната ос на Ω и ω_A с AB и AC. Тогава $XD^2 = XB.XA$, откъдето лесно следва, че $XA = \frac{p^2}{a+b}$ и аналогично $YA = \frac{p^2}{a+c}$. Така $\frac{XA}{YA} = \frac{a+c}{a+b} = \frac{AC_1}{AB_1} \Rightarrow XY || B_1C_1$. Последното означава, че $OI_A \perp B_1C_1$, което искахме да докажем.

Обратно към задачата, нека T е външният център на хомотетия(h), изпращаща Ω в ω_A. Нека F е допирната точка на ω_A с BC. Тогава от ъгли получаваме, че $\triangle M_BSM_C$ е хомотетичен на $\triangle DFE$. Следователно $h(M_BM_C) = DE$ и в частност $h(N) = M$, което означава, че $T \in MN$, както и $T \in OI_A$. Нека Ω_A е полувписаната окръжност срещу върха

A за $\triangle ABC$. Тогава от теорема за трите хомотетии за Ω, ω_A и Ω_A следва, че P(външен център на хомотетия, изпращаща Ω_A в Ω), (външен център на хомотетия, изпращаща Ω_A в ω_A) и T(външен център на хомотетия, изпращаща ω_A в Ω) лежат на една права. Последното означава, че $T \equiv K$, с което задачата е решена.

Задача 3. Даден е нетъпоъгълен триъгълник ABC ($BC > AC$) с височина CD ($D \in AB$), център на описаната окръжност O и среда M на страната AB. Точката E лежи на лъча BA и е такава, че $AE \cdot BE = DE \cdot ME$. Ако правата OE разполовява лицето на $\triangle ABC$ и $CO = CD \cos \sphericalangle ACB$, да се намерят ъглите на триъгълника ABC.

Решение. Ясно е, че E не е между A и B. Ако положим $AD = x$, $DB = y$, $AE = z$, то $AE.BE = DE.ME \Leftrightarrow z.(x + y + z) = (x + z).\frac{x+y+2z}{2} \Leftrightarrow x^2 + xy + xz - yz = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x+y+z}$, т.е. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{BE}$. Сега от теоремите на Менелай и Чева (или съображения с хармонично отношение) следва, че E лежи на правата през петите A_1 и B_1 на височините през върховете A и B, съответно. Нещо повече, изразяване на ъгли дава $CO \perp A_1B_1$, а от $\triangle ABC \sim \triangle B_1A_1C$ (с коефициент $\cos \sphericalangle ACB$) следва, че разстоянието от C от A_1B_1 е $CD \cos \sphericalangle ACB$, т.е. CO. Следователно $O \in A_1B_1$ и A_1B_1 разполовява лицето на $\triangle ABC$. Сега от горното подобие получаваме $\cos \sphericalangle ACB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sphericalangle ACB = 45°$. Тогава $CH = AB$, където H е ортоцентърът, а пък $AB = R\sqrt{2} = CD$. Следователно $H \equiv D$ и $\sphericalangle BAC = 90°$. Оттук $\sphericalangle ABC = 45°$.

Задача 4. На Математическите боеве ученици решавали n задачи, като всеки ученик решил точно 3 задачи. За всеки двама има най-много една задача, която е решена и от двамата. Да се докаже, че s е естествено число, за което $s^2 - s + 1 < 2n$, то има s задачи, никои три от които не са решени от един ученик.

Решение. Нека t е най-голямото число със свойството: Има t задачи, никои три от които не са решени от един ученик. Да допуснем, че $t \leq s - 1$ и да означим множеството от тези t задачи с A. Тъй като t е най-голямото число с това свойство, за всяка задача $x \notin A$ съществуват две задачи $y, z \in A$, такива, че има ученик решил задачи x, y и z (в противен случай ще добавим задача x към A и ще увеличим t).

По този начин на всяка задача извън A съответства двойка от задачи от A. При това на различни задачи извън A съответстват различни двойки от A (в противен случай ще има ученик решил повече от 3 задачи). Следователно задачите извън A са по-малко от двойките задачи в A. От друга страна от $t \leq s - 1$ получаваме, че двойките задачи в A са най-много $\binom{s-1}{2}$, а извън A има поне $n - (s - 1)$ задачи. Неравенството от условието е еквивалентно на $\binom{s-1}{2} < n - (s - 1)$ и получаваме противоречие.

Задача 5. Нека $a > 0$ и $12a + 5b + 2c > 0$. Да се докаже, че не е възможно уравнението $ax^2 + bx + c = 0$ да има два реални корена в интервала $(2; 3)$.

Решение. Да допуснем, че това се случва за корените x_1 и x_2. Разделяйки на $2a$ и ползвайки Виет, получаваме

$$62,5(x_1 + x_2) + x_1x_2 > 0 \Rightarrow (x_1 - 2,5)(x_2 - 2,5) > 0,25.$$

Но според допускането $|x_1 2,5| < 0,5$ и $|x_2 2,5| < 0,5$, така че получаваме абсурда $0,5.0,5 > 0,25$.

Задача 6. Съществува ли функция $f : N \to N$, за която

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)$$

за всяко $n \geq 2$?

Отговор: Не. Да допуснем, че такава функция съществува. От даденото уравнение получаваме $f(n+1)-f(n) > 0$ за $n \geq 2$, т.е. f е строго растяща. Следователно $f(n) > f(2) = n-2 \geq n-1$ при $n \geq 2$.

Сега ще ограничим f отгоре. От даденото уравнение имаме $f(f(n-1)) < f(n+1)$ или $f(f(n) < f(n+1)$ За $n \geq 1$. Тъй като f е растяща получаваме, че или $f(n) = 1$ или $f(n) < n+2$ за $n \geq 1$, като и в двата случая $f(n) < n+2$. Следователно $n-1 \leq f(n) \leq n+1$ за $n \geq 2$.

Нека $n > 4$. Имаме $f(n-1) \geq 2$ за $n-1 \geq 2$ и като приложим долната граница, получаваме

$$f(f(n-1)) \geq f(n-1) - 1 \geq n-3.$$

От даденото уравнение имаме

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n) \leq (n+2) - (n-1) = 3$$

и следователно $n-3 \leq 3$ за $n > 4$, което е невъзможно.

Задача 7. Функцията $f(x)$ има за допустими стойности всички реални числа, приема реални стойности и е такава, че $f(x+1) = 2f(x)$ за всяко реално x и $f(x) = x(x-1)$ за всяко $x \in (0,1]$. Да се намери най-голямото реално число m, за което неравенството $f(x) \geq -\frac{8}{9}$ е изпълнено за всички $x \in (-\infty, m]$.

Решение. Индуктивно получаваме, че за всяко цяло n: $f(x) = 2^n(x-n)(x-n-1) = 2^n((x-\frac{2n+1}{2})^2 - \frac{1}{4})$ за $x \in (n, n+1]$. В частност, най-малката стойност в интервала $(n, n+1]$ се достига при $x = \frac{2n+1}{2}$ и е -2^{n-2}, което е поне $\frac{8}{9}$ точно при $n \leq 1$. Остава да съобразим, че $x \geq 2$ и $4(x-2)(x-3) \geq -\frac{8}{9}$ са изпълнени едновременно точно при $2 \leq x \leq \frac{7}{3}$. Така търсеното m е $\frac{7}{3}$.

Задача 8. Да се намерят всички полиноми f с цели коефициенти, такива че $f(p)|(p-3)! + \frac{p+1}{2}$ за всяко нечетно просто число p.

Решение. Да отбележим, че ако f изпълнява условието, то и $-f$ също го изпълнява и нека БОО старшият коефициент на f бъде положителен. Първо ще разгледаме случая, когато f е неконстантен. Тогава да допуснем, че $f(0) \neq 0$. От Лема на Шур имаме, че съществуват безбройно много прости числа q, делящи стойностите на полинома. Нека допуснем, че $f(-1) \neq 0$ и нека q е просто число, което дели $f(n)$ за някое естествено число n, както и $q > \max |f(-1)|, |f(0)$. Тогава т.к q не дели $f(0)$, то q не дели n. Следователно от Теоремата на Дирихле аритметичната прогресия с общ член $qk + n (k = 1, 2, \ldots)$ съдържа безбройно много прости числа. Нека p е едно от тях, като БОО можем да считаме, че $p - 3 > q$. Следователно $q|f(p)|(p-3)! + \frac{p+1}{2}$, но $q|(p-3)!$, следователно $q|p+1$, откъдето следва, че $q|f(-1)$, което е невъзможно, защото $q > |f(-1)|$. Полученото противоречие показва, че $f(-1) = 0$, което означава, че $x+1|f(x)$. Като положим $p = 3$, получаваме, че $4|3$, противоречие. Следователно $f(0) = 0$, т.е съществува полином $g \in \mathbb{Z}[X]$, така че $f(x) = xg(x)$. Прилагайки същите разсъждения за g и т.н получаваме, че $f(x) = ax^n$ за някое a. Отново полагането $p = 3$ води до $a = 1$ и $n = 1$. Остана да докажем, че $p|(p-3)! + \frac{p+1}{2}$, но от Теоремата на Уилсън следва, че $(p-2).(p-3)! \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow (p-3)! \equiv \frac{-1}{2} \pmod{p}$, откъдето твърдението следва. Ако f е константа, то $p = 3$ и $p = 5$ водят до $f \equiv 1$. Така окончателно всички решения са $f(x) = \pm x$ и $f(x) = \pm 1$.

Десети български фестивал на младите математици

Четвърти кръг, Тема за 10 – 12 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Точките M и N са от страната BC на триъгълника ABC, като $BM = CN$ и M е между B и N. Точките $P \in AN$ и $Q \in AM$ са такива, че $\sphericalangle PMC = \sphericalangle MAB$ и $\sphericalangle QNB = \sphericalangle NAC$. Да се докаже, че $\sphericalangle QBC = \sphericalangle PCB$.

Решение. Нека A' и P' са симетричните точки на A и P относно симетралата на BC. Означаваме $X = NQ \cap A'B$ и $Y = NP' \cap AB$. От симетрията имаме $P' \in A'M$.
Тъй като $AA'MN$ е равнобедрен трапец, то точките A, A', M, N лежат на една окръжност. От друга страна, $\sphericalangle XNM = \sphericalangle NAC = \sphericalangle XA'M$ и значи A', X, M, N също лежат на една окръжност. Аналогично A, Y, N и M лежат на една окръжност. Следователно точките A, A', M, N, X и Y лежат на една окръжност. Тогава от теоремата на Паскал получаваме $P' \in BQ$ и следователно $\sphericalangle QBC = \sphericalangle P'BC = \sphericalangle PCB$.

Задача 2. Дадено е естествено число n. Първоначално клетките на таблица $2n \times 2n$ са бели. Двама играчи A и B играят следната игра. Първо A оцветява m от клетките в червено. След това B избира n реда и n колони и оцветява полетата от тях в черно. Печели A точно когато остане поне едно червено поле. Да се намери най-малката възможна стойност на m, при която A може да спечели без значение как B играе.

Отговор: $3n + 1$. Нека първо $m \leq 3n$. Тогава B избира първо да оцвети n-те реда с най-голям брой червени клетки. Ако допуснем, че остават поне $n + 1$ червени клетки, то поне един от неоцветените в черно редове съдържа поне 2 червени клетки. Тогава от максималността имаме, че всеки черен ред съдържа поне 2 черни клетки и значи броят на почернелите червени клетки е поне $2n$. Но тогава остават най-много n червени клетки (които не са в черно), противоречие. Следователно остават най-много n червени клетки и е достатъчно B да избере техните колони (това е възможно, тъй като има право на n колони).

Сега нека $m = 3n + 1$. Тогава A печели като оцвети клетките с координати:

$$(1, 1);\quad (i, i + 1) \text{ за } 1 \leq i \leq n;\quad (i + 1, i) \text{ за } 1 \leq i \leq n;\quad (j, j) \text{ за } n + 1 \leq j \leq 2n$$

Наистина, да допуснем, че B може да оцвети всичките в черно. Клетките $(j, j), n + 2 \leq j \leq 2n$ са непременно оцветени чрез $n - 1$ различни линии (редове или колони), които не съдържат други червени полета и значи останалите $2n + 2$ полета трябва да се преоцветят в черно чрез оставащите $n+1$ линии. Тъй като никоя линия не съдържа повече от две червени полета, трябва всяко червено поле да принадлежи на точно една от тези линии. Без ограничение нека $(1, 1)$ е преоцветена в черно чрез ред. Нека k е най-малкото естествено число такова, че редът k, $2 \leq k \leq n+1$ не е черен (такова има, иначе ще имаме общо поне $n+1$ черни реда, противоречие). Тогава полето $(k, k-1)$ трябва да бъде в черно чрез колона $k - 1$. Но в тази колона има друго червено поле $(j, k - 1)$, което принадлежи на черния ред с номер $j < k$, което противоречи на минималността на k.

Задача 3. Естественото число $n > 1$ е такова, че има естествено число a и просто число q, които изпълняват следните условия:

- q дели $n-1$ и $q > \sqrt{n}-1$
- n дели $a^{n-1}-1$
- НОД$(a^{\frac{n-1}{q}}-1, n) = 1$.

Възможно ли е n да е съставно число?

Решение. Не! Да допуснем, че е възможно и нека p е прост делител на n, за който $p \leq \sqrt{n}$. От първото условие следва $q > \sqrt{n}-1 \geq p-1$ и понеже q е просто, получаваме НОД$(q, p-1) = 1$. Така от теоремата на Безу съществуват цели числа x и k (в случая можем да приемем, че са естествени), за които $qx = (p-1)k+1$. Тъй като p дели n, второто условие дава $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{p}$, откъдето

$$1 \equiv (a^{n-1})^x \equiv (a^{\frac{n-1}{q}})^{qx} \equiv (a^{\frac{n-1}{q}})^{(p-1)k+1} \equiv ((a^{\frac{n-1}{q}})^k)^{p-1}.a^{\frac{n-1}{q}} \equiv a^{\frac{n-1}{q}} \pmod{p}$$

(за последното сравнение използвахме теоремата на Ферма). Следователно p е общ прост делител на $a^{\frac{n-1}{q}}-1$ и n, което противоречи на третото условие.

Задача 4. Вярно ли е, че за всяко просто число p съществуват неконстантни полиноми P и Q на променливата x и с цели коефициенти, за които остатъкът при деление на p на коефициента пред x^n в нормалния вид на произведението PQ е 1 за $n=0$ и $n=4$; $p-1$ за $n=2$ и е 0 за всяко друго $n \geq 0$?

Решение. Да! При $p=2$ и $p=3$ е достатъчно да изберем съответно $P=Q=x^2+x+1$ и $P=Q=x^2+1$. Нека $p \geq 5$. Поне едно от числата -1, -3 и 3 е квадратичен остатък по модул p (иначе произведението им, което е 9, би било квадратичен неостатък). Ако $s^2 \equiv -1 \pmod{p}$ за някое s, получаваме (с точност до модул p) $x^4-x^2+1 = (x^2-1)^2 - s^2x^2 = (x^2-sx-1)(x^2+sx-1)$. Ако $s^2 \equiv 3 \pmod{p}$ за някое s, то (с точност до модул p) $x^4-x^2+1 = (x^2+1)^2 - s^2x^2 = (x^2-sx+1)(x^2+sx+1)$. Ако $s^2 \equiv -3 \pmod{p}$ за някое s, то (с точност до модул p) $4(x^4-x^2+1) = (2x^2-1)^2 - s^2 = (2x^2-s-1)(2x^2+s-1)$ и умножавайки двете страни по число t, за което $4t \equiv 1 \pmod{p}$ (такова има по теоремата на Безу), получаваме исканото.

Задача 5. Ненамаляващите функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са такива, че $f(r) \leq g(r)$ за всяко рационално число r. Вярно ли е, че $f(x) \leq g(x)$ за всяко реално число x?

Решение. Не! Избираме $f(x) = 1$ за $x \geq \sqrt{3}$ и 0 иначе; $g(x) = 1$ за $x > \sqrt{3}$ и 0 иначе.

Задача 6. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, такива че за всеки две $x, y \in \mathbb{N}_0$ е изпълнено

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x^2+y^2)$$

(С $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ се означава множеството на целите неотрицателни числа.)

Решение. При $x=0$ и $y \neq 0$ получаваме $yf(0) = yf(y^2)$, т.е. $f(y^2) = f(0)$. Замествайки $y \neq 0$ с y^2 в даденото, получаваме $xf(0) + y^2f(x) = (x+y^2)f(x^2+y^4)$, т.е. $x(f(0)-f(x)) + (x+y^2)f(x) = (x+y^2)f(x^2+y^4)$. Така за фиксирано x, $x(f(0)-f(x))$ се дели на $x+y^2$ за всяко $y \neq 0$ (впрочем, очевидно и за $y=0$) и в частност има безбройно много делители. Последното е възможно само когато то е 0, т.е. $f(x) = f(0)$ за всяко x. Обратно, ясно е, че всяка константна функция е решение на задачата.

Задача 7. Нека n е естествено число. Графът G е с $10n$ върха. Тези върхове са разделени на 10 групи от по n върха и между два върха в G има ребро тогава и само тогава, когато са в различни групи. Колко най-много ребра може да има подграф на G, който не съдържа пълен граф с 4 върха?

Отговор: $33n^2$**.** Да означим върховете в i-тата група с A_1^i, A_2^i, …, A_n^i. Всяко ребро на G е в точно n^8 копия на пълния граф с 10 върха, съдържащи се в G. Следователно броят ребра на подграф можем да запишем като

$$\frac{\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_{10}} \sum_{k_1,k_2} (\mathbf{1}_{A_{j_{k_1}}^{k_1} A_{j_{k_2}}^{k_2} \in E(G)})}{n^8}$$

където $\mathbf{1}_{xy\in E(G)} = 1$ ако xy е ребро и 0 иначе. За подграф, несъдържащ K_4, всяко от събираемите на външната сума в числителя е най-много 33 (понеже максималния подграф на K_{10}, без копия на K_4, има 33 ребра съгласно теоремата на Туран). Броят на събираемите е n^{10} и така получаваме оценката $\frac{33n^{10}}{n^8} = 33n^2$. Примерът се конструира аналогично.

Задача 8. Даден е триъгълник ABC. Точката D от описаната му окръжност k е такава, че CD е симедиана в $\triangle ABC$ (т.е. $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACM$, където M е средата на AB). Нека X и Y са от лъчите CB и CA, като $CX = 2CA$ и $CY = 2CB$. Да се докаже, че окръжността, допираща се външно до k и до правите CA и CB, се допира до описаната около триъгълника XDY окръжност.

Решение. При композиция на инверсия с център C и радиус $\sqrt{CA.CB}$ и симетрия относно ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ точките X и Y отиват в средите M и N на AC и BC, а D отива в средата на AB. Окръжността, допираща се външно до k и правите CA и CB, отива във вписаната за $\triangle ABC$. Следователно задачата се свежда до случая на теоремата на Фойербах за допирането на вписаната окръжност и окръжността на Ойлер за $\triangle ABC$.

Десети български фестивал на младите математици

Финал, Тема за 10 – 12 клас

Задача 1. Намерете най-малката стойност на естественото число k със следното свойство: не съществува аритметична прогресия с 2019 члена точно k от които са цели числа.

Отговор: $k = 71$. Да разгледаме аритметична прогресия с първи член a_1, разлика d и 2019 члена, в която има k цели числа. Без ограничение можем да считаме, че най-малкото цяло число в прогресията е 0 (тъй като можем да прибавим към всички членове произволно цяло число).

Нека следващото цяло число в прогресията е n. Тогава за разликата d на прогресията имаме $td = n$, където t е естествено число и $(t, n-1) = 1$ (ако $(t, n-1) \neq 1$, то в прогресията ще има цяло число, по-малко от n). Следователно $d = \dfrac{n}{t}$. Целите числа са $0, n, 2n, \dots, (k-1)n$, като между всеки две от тях има $t-1$ члена на прогресията.

В прогресията има най-малко $k+(k-1)(t-1)$ члена, а най-много $k+(k-1)(t-1)+2(t-1)$ члена. Следователно $k+(k-1)(t-1) \leq 2019 \leq k+(k-1)(t-1)+2(t-1)$, откъдето получаваме:

$$\frac{2020}{k+1} \leq t \leq \frac{2018}{k-1}.$$

Когато $\dfrac{2018}{k-1} - \dfrac{2020}{k+1} \geq 1$ в интервала $\left[\frac{2020}{k+1}, \frac{2018}{k-1}\right]$ има цяло число. Това става при $k \leq 62$. Директно се проверява, че при $64 \leq k \leq 70$ в интервала $\left[\frac{2020}{k+1}, \frac{2018}{k-1}\right]$ има цяло число, а при $k = 71$ това не е вярно.

Задача 2. Съществува ли строго растяща функция $f : N \to N$, такава че за всяко естествено число n е в сила равенството

$$f(f(f(n))) = n + 2f(n)?$$

Решение. Всяко естествено число n може да се представи по единствен начин като сума от числа на Фибоначи по следния алгоритъм: (1) Ако k е максималното естествено число, за което $n \geq F_k$, то F_k участва в представянето и същото прилагаме за $n - F_k$. Ясно е, че по т.к $F_{k+1} > F_k$, то F_{k-1} не участва в представянето на n. Аналогично продължавайки по същия начин получаваме единствено представяне на n като сума на числа на Фибоначи (без съседни членове в него). Нека сега $n = F_{i_1} + \cdots + F_{i_s}$ е представянето на n. Ще докажем, че функцията $f(n) = F_{i_1+1} + F_{i_2+1} + \cdots + F_{i_s+1}$ изпълнява условието. Т.к доказахме, че представянето, дефинирано в (1) е еднозначно, то функцията е добре дефинирана(еднозначно). Следователно

$$f(f(f(n))) = F_{i_1+3} + \cdots + F_{i_s+3} = F_{i_1+1} + \cdots + F_{i_s+1} + F_{i_1+2} + \cdots + F_{i_s+2} = 2f(n) + n.$$

Задача 3. Даден е неравнобедрен $\triangle ABC$ с описана окръжност $\omega(O)$. Нека H е петата на препрендикуляра от C към AB и нека M е средата на AB. Дефинираме точка X като втората пресечна точка на окръжността с диаметър CM и ω и нека XH пресича ω за втори път в точката Y. Ако $CO \cap AB = D$, то да се докаже, че окръжността, описана около $\triangle YHD$ се допира до ω.

Решение. Нека допирателните в точките A и B към ω се пресичат в точка T. Нека $CT \cap \omega = \{C, Y'\}$, нека $CH \cap \omega = \{C, Z\}$, нека A_1 и B_1 са петите на височините през A и B и нека S е ортоцентърът на $\triangle ABC$. Първо ще докажем следната

Лема. Точките T, Z и X са колинерни.

Доказателство. Лесно се вижда, че S, M и X лежат на една права, откъдето следва, че A_1, B_1, C и X лежат на една окръжност. Оттам следва, че $\triangle XA_1B \sim \triangle XB_1A$, което значи, че $\frac{XA}{XB} = \frac{B_1A}{A_1B}$, но $\triangle ASB_1 \sim BSA_1 \Rightarrow \frac{B_1A}{A_1B} = \frac{AS}{BS} \Rightarrow \frac{XA}{XB} = \frac{AS}{BS}$. Както е добре известно обаче, точките S и Z са симетрични относно правата AB. Последното означава, че $\frac{XA}{XB} = \frac{AR}{BR}$, тоест четириъгълникът $AXBR$ е хармоничен, с което лемата е доказана.

Нека сега $Y'X \cap CZ = H'$. От Теорема на Брокар за $\triangle BXCY'$ следва, че H' лежи на полярата на относно ω, но тази поляра е точно AB! Следователно $H' \equiv H$, откъдето следва, че $Y' \equiv Y$. Сега нека точката P да е пресечната на допирателните към ω в точките C и Y. Т.к $ACBY$ е хармоничен, то $P \in AB$. Сега от правоъгълния триъгълник DCP следва, че $PH.PD = PC^2$, но $PY^2 = PC^2 \Rightarrow PY^2 = PH.PD$, т.е PY е допирателна към описаната около $\triangle YHD$ окръжност, с което задачата е решена.

Задача 4. Вписаната в остроъгълния триъгълник ABC окръжност допира страните AB и AC съответно в точките K и L. Височината AH пресича ъглополовящите на $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ACB$ в точките P и Q, съответно. Да се докаже, че средата M на AH лежи на радикалната ос на окръжностите, описани около триъгълниците KPB и LQC.

Решение. Пресечете двете окръжности повторно с AH и използвайте степен на точката. Изразете всяка от отсечките чрез трите страни на $\triangle ABC$.

Задача 5. За всяко естествено число m с $\pi(m)$ означаваме броят на простите числа, ненадминаващи m. Да се намерят всички двойки естествени числа (a, b), за които съществуват полиноми $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$, така че за всяко естествено число n е вярно равенството

$$\frac{\pi(an)}{\pi(bn)} = \frac{P(n)}{Q(n)}.$$

Отговор: $(a, b) = (k, k)$ **за някое** $k \in \mathbb{N}$**.** Първо очевидно всички такива двойки изпълняват условието. Обратно нека допуснем, че БОО $a > b$. Освен това можем БОО да приемем и, че $(P, Q) = 1$. От Теоремата на Безу за полиноми следва, че съществуват полиноми $R, S \in \mathbb{Z}[X]$ и константа C, такива че (1) $P(n)R(n) + Q(n)S(n) = C$ за всяко естествено число n. Сега да допуснем, че поне един от P и Q е неконстантен и нека БОО това е P. Тогава от Лема на Шур следва, че съществуват безбройно много прости числа p, които делят $P(n)$ за някое естествено n. От (1) следва, че съществуват краен брой прости числа, които делят $(P(n), Q(n))$. Последното означава, че съществуват безкрайно много двойки естествени числа (n, p), където $n \leq p$, а p е просто число, такова че $p|P(n)$ и $(p, Q(n)) = 1$. Тогава за всяка от тези двойки $p|\pi(an)$. В частност, $\pi(ap) > \pi(an) > p$. Ще докажем следната

Лема. За всяко естествено число n е в сила неравенството $\pi(n) < 6 \log 2 \frac{n}{\log n}$.

Доказателство. За всяко естествено число k имаме, че

$$4^k > \binom{2k}{k} > k^{\pi(2k) - \pi(k)} \Rightarrow 2k \log 2 > (\pi(2k) - \pi(k)) \log k$$

$$\Rightarrow \pi(2k) - \pi(k) < \frac{2k \log 2}{\log k}$$

Сега полагайки $k = 2^i$ и сумирайки по $i = 0, 1, 2, \ldots, s$ получаваме, че

$$\pi(2^{s+1}) < \sum_{i=1}^{s+1} \frac{2^i}{i} < 3\frac{2^{s+1}}{s+1},$$

където последното неравенство следва с индукция по s.
Сега нека за произволно естествено число $2^{s+1} > n \geq 2^s$. Тогава

$$\pi(n) \leq \pi(2^{s+1}) < 3\frac{2^{s+1}}{s+1} < 6\log 2\frac{n}{\log n}$$

и така лемата е доказана.

Обратно към задачата имаме, че $p \leq \pi(ap) < 6\log 2\frac{ap}{\log ap} < p$ за достатъчно голямо p. Полученото противоречие показва, че P и Q са константи.

Следователно имаме, че $\frac{\pi(an)}{\pi(bn)} = \frac{s}{r}$, където s и r са фиксирани взаимнопрости естествени числа. Т.к $a > b$, то $s > r \geq 1$, следователно s има прост делител q. Освен това т.к $(r, s) = 1$, то $(q, r) = 1$. Следователно $q|\pi(an)$ за всяко естествено число n. Достатъчно е да намерим едно естествено число n, такова че $\pi(a(n+1)) - \pi(an) = 1$, за да получим противоречие. Нека $p_2, p_3, \ldots, p_a$ са различни прости числа, по-големи от a. Нека $N < P = p_2p_3\cdots p_a$ е такова, че $p_i|aN + i$ за всяко $i = 2, \ldots, a$(Такова има и е единствено заради КТО). Нека сега разгледаме аритметичната прогресия с общ член $x_k = aPk + aN + 1$. Да забележим, че $(aN + 1, aP) = 1$, защото ако допуснем, че $p_i|aN + 1$, то ще следва, че $p_i|i - 1$, т.е $p_i < i \leq a$, което противоречи с избора на p_i. От Теорема на Дирихле сега следва, че тази редица съдържа безкрайно много прости числа, което решава задачата ни, защото с избора на $n \equiv N \pmod{p_2 \cdots p_a}$ и $an+1$ да е просто гарантирахме $\pi(a(n+1)) - \pi(an) = 1$. Полученото противоречие показва, че $a = b$.

Задача 6. Да се докаже, че за всяко комплексно число z е изпълнено неравенството

$$|z|^2 + 2|z - 1| \geq 1,$$

като равенство се достига при $z = 1$.

Решение. Ако $|z| \geq 1$ имаме:

$$|z|^2 + 2|z - 1| \geq 1 + 2|z - 1| \geq 1,$$

като равенство се достига при $z = 1$. Ако $|z| < 1$ имаме:

$$|z - 1| \geq ||z| - 1| = 1 - |z|,$$

откъдето следва:

$$|z|^2 + 2|z - 1| - 1 \geq |z|^2 + 2(1 - |z|) - 1 = (|z| - 1)^2 \geq 0.$$

Задача 7. Изпъкнал многостен има m триъгълни стени (и възможно стени от други видове). От всеки връх излизат точно 4 ребра. Да се намери най-малката възможна стойност на m.

Решение. Да разгледме многостен с дадените свойства. Да означим с S, R и V броят на стените, ребрата и върховете. Всяко ребро има две върха, като от всеки връх излизат по 4 ребра. Следователно $2R = 4V$.

Да преброим ребрата на всяка стена. Имаме поне $3m + 4(S - m)$ ребра, като всяко се брои по два пъти и следователно $2R \geq 3m + 4(S - m)$. От формулата на Ойлер $S + V - R = 2$ и от $R = 2V$ получаваме $4S - 8 = 2R \geq 3m + 4(S - m)$. Оттук $m \geq 8$ и понеже октаедъра има исканите свойства, то $m = 8$.

Задача 8. Изпит има 5 въпроса, всеки с 4 избираеми отговора. На изпита се явили 2000 ученици и всеки посочил точно един отговор на всеки въпрос. Да се намери най-малката стойност на n, за която е възможно отговорите на учениците да имат следното свойство: измежду всеки n ученици има четирима, между които всеки двама имат най-много три еднакви отговора.

Решение. Първо ще докажем, че $n \geq 25$. Let 1, 2, 3, 4 denote the four different choices of each problem. Represent each student's answer sheet by an ordered 5-tuple $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$, where the student's answer to problem i is a_i. We say that two answer sheets are of the same type if their corresponding 5-tuples belong to a set of the form $\{(k, a_2, a_3, a_4, a_5)|k \in \{1, 2, 3, 4\}$, where $a_2, a_3, a_4, a_5 \in \{1, 2, 3, 4\}$. Since there are 256 such sets, and $2000 = 256.7 + 208$, at least eight answer sheets are of the same type by the pigeonhole principle. Among the 1992 remaining answer sheets, again some eight are of the same type. Finally, among the 1984 remaining answer sheets, another eight are of the same type. Consider the set A of these 24 answer sheets. Given any two answer sheets in A, two of them must be of the same type, that is, their solutions for the last 4 problems are identical. This violates the assumption that there are 4 answer sheets in A, among which any two have at most 3 common answers. Hence, $n \geq 25$.

Now we show that $n = 25$ is indeed attainable. Define the set

$$S = \{(a1, a2, a3, a4, a5)| \sum_{i=1}^{4} a_i \equiv 0 (mod 4), a_i \in \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Then $|S| = 44 = 256$, and any two answer sheets have at most 3 common answers if their corresponding 5-tuples are distinct elements of S. Pick any 250 elements of S, and assume that exactly eight students turn in answer sheets that correspond to each of these 250 5-tuples. Among any $25 > 3.8$ answer sheets, there are four whose corresponding 5-tuples are distinct elements in S, and they satisfy the given conditions of the problem. Therefore, the answer is $n = 25$.