

52. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 19–20 април 2003 г.

Задача 1. Правоъгълен трапец с лице 10 и височина 4 е разделен с права, успоредна на основите му, на два трапеца, в които могат да се впишат окръжности. Да се намерят радиусите на тези окръжности.

Олег Мушкаргов

Задача 2. Дадено е естествено число n . Яна пише n различни естествени числа, а след това Иво изтрива няколко от тях (възможно нула, но не всички) и пред всяко от останалите числа поставя $+$ или $-$. Иво печели, ако полученният резултат се дели на 2003, а в противен случай печели Яна. Да се обоснове кой от двамата има печеливша стратегия.

Ивайло Кортезов

Задача 3. Да се намерят всички реални числа a такива, че $4[an] = n + [a[an]]$ за всяко естествено число n ($[x]$ означава най-голямото цяло число, ненадминаващо x).

Николай Николов

Задача 4. Точка D върху страната AC на $\triangle ABC$ е такава, че $BD = CD$. През точка E от страната BC е прекарана права, успоредна на BD , която пресича правата AB в точка F . Ако $G = AE \cap BD$, да се докаже, че $\sphericalangle BCG = \sphericalangle BCF$.

Олег Мушкаргов, Николай Николов

Задача 5. Да се намери броят на реалните решения на системата

$$\begin{cases} x + y + z = 3xy \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3xz \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3yz. \end{cases}$$

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 6. Едно множество C от различни естествени числа ще наричаме "добро ако за всяко цяло число k съществуват $a, b \in C$, $a \neq b$, такива, че числата $a + k$ и $b + k$ не са взаимно прости. Да се докаже, ако сумата от елементите на C е равна на 2003, то за някое $c \in C$ множеството $C \setminus \{c\}$ също е "добро".

Александър Иванов, Емил Колев

52. Национална олимпиада по математика

Областен кръг

1. Нека $ABCD$ е трапец с лице 10 и бедро $AD = 4$, перпендикулярно на основите $AB = a$ и $CD = b$, $a > b$. Нека правата $MN \parallel AB$, $M \in AD$, $N \in BC$, го разделя на два трапеца, в които могат да се впишат окръжности. Означаваме $MN = c$, $AM = h_1$ и $DM = h_2$. Тогава $h_1^2 + (a-c)^2 = (a+c-h_1)^2$, т.е. $h_1 = \frac{2ac}{a+c}$. Аналогично $h_2 = \frac{2bc}{b+c}$, откъдето $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a(b+c)}{b(a+c)}$. От друга страна, $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a-c}{c-b}$ и следователно $(a+b)(ab-c^2) = 0$. Тогава $c^2 = ab$, $h_1 = \frac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $h_2 = \frac{2b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ и $h_1 + h_2 = 2\sqrt{ab}$. От условието получаваме, че $\sqrt{ab} = 2$, $a + b = 5$, т.е. a и b са корени на уравнението $x^2 - 5x + 4 = 0$. Следователно $a = 4$, $b = 1$ и търсените радиуси са равни на $\frac{h_1}{2} = \frac{4}{3}$ и $\frac{h_2}{2} = \frac{2}{3}$.

2. Яна има печеливша стратегия при $n \leq 10$, като напише например числата $1, 2, \dots, 2^{n-1}$. Наистина, както и да играе Иво, полученият резултат не може да се дели на 2003, защото е между -1023 и 1023 и не е равен на 0, понеже има знака, поставен пред най-голямото неизтрито число $(2^j > 2^j - 1 = \sum_{i=0}^{j-1} 2^i)$.

Ако $n \geq 11$, множеството C на избраните от Яна числа има $2^n - 1 > 2003$ различни непразни подмножества. Следователно сумите на числата в две от тях, например A и B , дават равни остатъци при деление на 2003. Ако Иво постави $+$ пред числата от $A \setminus B$, $-$ пред числата от $B \setminus A$ и изтрие останалите числа от C , той печели, защото получената сума се дели на 2003.

3. От условието следва, че

$$4(an - 1) < n + a(an) \text{ и } 4an > n + a(an - 1) - 1,$$

$$\text{т.е. } 1 + a^2 - \frac{a+1}{n} < 4a < 1 + a^2 + \frac{4}{n}.$$

При $n \rightarrow \infty$ заключаваме, че $1 + a^2 = 4a$, откъдето $a = 2 - \sqrt{3}$ или $a = 2 + \sqrt{3}$. Като заместим $n = 1$ в условието виждаме, че първият случай не

е възможен. Във втория случай полагаме $b = \left[\frac{n}{a}\right]$ и $c = \frac{n}{a} - b$. Понеже $a = 4 - \frac{1}{a}$, то

$$\begin{aligned} n + [a[an]] &= [n + a[4n - \frac{n}{a}]] = [n + a(4n - b - 1)] = [a(4n - 1 + c)] = \\ &= [(4 - \frac{1}{a})(4n - 1 + c)] = [4(4n - 1) - 4(\frac{n}{a} - c) + \frac{1 - c}{a}] = 4(4n - 1 - b) = \\ &= 4[4n - \frac{n}{a}] = 4[an]. \text{ Следователно } a = 2 + \sqrt{3} \text{ е единственият отговор на } \end{aligned}$$

4. Ако $H = AC \cap EF$, то $\sphericalangle CDG = \sphericalangle FHC$ и

$$\frac{CD}{DG} = \frac{BD}{DG} = \frac{FH}{HE} = \frac{FH}{HC}.$$

Тогава $\triangle CDG \sim \triangle FHC$ и значи $\sphericalangle GCD = \sphericalangle CFH$, откъдето

$$\sphericalangle BCG = \sphericalangle BCD - \sphericalangle GCD = \sphericalangle CEH - \sphericalangle CFH = \sphericalangle BCF}.$$

5. Ако $y = 0$, от първото уравнение следва, че $x = -z$, заместваме във второто и намираме $x = z = 0$, като тройката $(0, 0, 0)$ очевидно е решение на системата. При $y \neq 0$ полагаме $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{z}{y}$ и системата добива вида

$$\begin{cases} 1 + a + b = 3ay \\ 1 + a^2 + b^2 = 3ab \\ y(1 + a^3 + b^3) = 3b. \end{cases}$$

Като изключим y , получаваме

$$\begin{cases} (1 + a + b)(1 + a^3 + b^3) = 9ab \\ 1 + a^2 + b^2 = 3ab. \end{cases}$$

Тогава за $u = a + b$, $v = ab$ имаме, че

$$\begin{cases} (1 + u)(1 + u^3 - 3uv) = 9v \\ 1 + u^2 - 2v = 3v \end{cases}$$

откъдето $v = \frac{u^2 + 1}{5}$ и $0 = u^4 + u^3 - 6u^2 + u - 2 = (u - 2)(u^3 + 3u^2 + 1)$. Случаят $u = 2$ води до $v = 1$, $a = b = 1$ и решението $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Функцията

$f(u) = u^3 + 3u^2 + 1$ има локален максимум при $u = -2$ и локален минимум при $u = 0$. Понеже $f(0) = 1 > 0$, уравнението $f(u) = 0$ има единствен реален корен u_0 , като $u_0 < -2$. Тогава $u_0^2 - 4\frac{u_0^2 + 1}{5} = \frac{u_0^2 - 4}{5} > 0$ и следователно системата

$$\begin{cases} a + b = u_0 \\ ab = \frac{u_0^2 + 1}{5} \end{cases}$$

има две решения, които водят до още две решения на дадената система. Окончателно, системата от условието на задачата има четири реални решения.

6. Нека $p_1, p_2, \dots, p_n$ са всички прости делители на всевъзможните разлики на две различни числа от C . Да допуснем, че за всяко p_i съществува остатък α_i , който се среща най-много веднъж при деление на числата от C на p_i . Съгласно Китайската теорема за остатъците можем да намерим цяло число k , даващо остатък $-\alpha_i$ при деление на p_i за всяко i . От условието следва, че p_j дели $a + k$ и $b + k$ за някое j и някои $a, b \in C$. Тогава a и b дават остатък α_j при деление на p_j , което е противоречие. И така, числата от C дават поне по два пъти всеки остатък при деление на някое просто число p . Ако допуснем, че тези остатъци се срещат точно по два пъти, то сумата от числата в C ще има вида $p \cdot r + 2(0 + 1 + \dots + p - 1) = p(r + p - 1)$, $r \geq 1$ - противоречие, понеже 2003 е просто число. Следователно някой остатък се среща поне три пъти и като махнем от C кое да е число, даващо този остатък, получаваме отново "добро"множество.