

**Задача 8.1.** а) Да се докаже тъждеството

$$(y-x)^3 - 3(y-x)x^2 - x^3 = -y^3 + 3y(x-y)^2 + (x-y)^3$$

б) Да се намери  $a$ , така че числата  $x = 7$  и  $y = 4$  да удовлетворяват уравнението  $x^3 - 3xy^2 + y^3 = a$ . За така намерената стойност на  $a$ , да се намерят още две целочислени решения на това уравнение.

**Решение.** а) Привеждаме в нормален вид двете части на равенството и получаваме, че всяка от тях е равна на  $x^3 - 3xy^2 + y^3$ .

б) Заместваме  $x = 7$  и  $y = 4$  и получаваме  $a = 71$ . Нека  $P(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$ . От тъждеството следва, че  $P(x, y) = P(y - x, -x) = P(-y, x - y)$ , което показва, че ако  $(x, y)$  е решения на уравнението, то  $(y - x, -x)$  и  $(-y, x - y)$  също са решения, т.е. от  $x = 7, y = 4$ , следва, че  $x = -3, y = -7$  и  $x = -4, y = 3$  също са решения.

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за а); 1 т. за намиране  $a = 71$ ; 3 т. за намиране на решенията  $x = -3, y = -7$  и  $x = -4, y = 3$ .

**Задача 8.2.** Във вътрешността на равнобедрен триъгълник  $ABC$ ,  $AC = BC$ , е взета точка  $M$ , а върху отсечката  $AM$  е взета точка  $K$ , така че  $\sphericalangle AMB = 2 \sphericalangle CKM$ . Да се докаже, че ако  $CK = KM + BM$ , то  $\sphericalangle CKM = \sphericalangle ACB$ .

**Решение.** Продължаваме  $BM$  до пресичането с  $CK$  в точка  $N$ . Триъгълникът  $KMN$  е равнобедрен, защото  $\sphericalangle NKM = \sphericalangle KMN$ , откъдето  $KM + BM = BN$ . Разглеждаме триъгълниците  $ACK$  и  $CBN$ . Имаме  $AC = BC$  по условие,  $CK = BN$  и  $\sphericalangle AKC = \sphericalangle BNC$  като допълнителни към равни ъгли. Ще отбележим, че по тази причини те са тъпи ъгли. Следователно  $\triangle ACK \cong \triangle CNB$ , откъдето  $\sphericalangle CAK = \sphericalangle BCN$ . Оттук

$$\sphericalangle CKM = \sphericalangle CAK + \sphericalangle ACK = \sphericalangle BCK + \sphericalangle ACK = \sphericalangle ACB.$$

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за въвеждане на точката  $N$ ; 1 т. за  $CK = BN$ ; 2 т. за  $\triangle ACK \cong \triangle CNB$ ; 2 т. за довършване на решението.

**Задача 8.3.** Да се намери най-малкото естествено число  $n$ , за което съществува естествено число  $x$ , такова че

$$(x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 + (x+4)^3 = (x+n)^3.$$

**Решение.** Нека  $x$  е естествено число, за което  $(x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 + (x+4)^3 = (x+n)^3$ . От малката теорема на Ферма ( $x^3 \equiv x \pmod{3}$ ) следва, че  $n \equiv 1 \pmod{3}$ . Най-малката възможност за  $n$  е 7. Тогава уравнението добива вида  $x^3 + 3x^2 - 19x - 81 = 0$ . Последното няма целочислени решения, защото последните могат да са само от вида  $3^k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , които лесно се отхвърлят. Нека  $n = 10$ . Тогава уравнението добива вида  $x^3 - 70x - 300 = 0$ . Очевидно, ако  $x$  е естествено число, то  $x$  се дели на 2 и на 5, а  $x = 10$  е решение на последното. Търсената стойност на  $n$  е 10.

**Оценяване.** (7 точки) 3 т. за  $n \equiv 1 \pmod{3}$ ; 2 т. за отхвърляне на случая  $n = 7$ ; 2 т. за намиране на отговора  $n = 10$ .

**Задача 8.4.** На дъската са написани числата  $1, 2, \dots, n, n \geq 3$ . Разрешена е следната операция: Избират се две числа  $a$  и  $b$ , изтриват се и на тяхно място се записват числата  $a + b$  и  $|a - b|$ . Да се докаже, че е възможно да се направят краен брой такива операции така, че всички числа да станат равни на едно и също число и да се намерят всички възможни стойности за това число.

**Решение.** Да приемем, че на дъската в някакъв момент се получават еднакви числа. Ако  $a + b$  и  $|a - b|$  имат нечетен прост делител  $p$ , то и числата  $a$  и  $b$  се делят на  $p$ . Следователно числото, което остава накрая може да бъде само степен на двойката.

Ако на дъската имаме числата  $0$  и  $a$ , можем да получим чрез операцията  $(0, a) \rightarrow (a, a) \rightarrow (0, 2a)$ , т.е. числото  $a$  може да се удвои. Последното показва, че ако от дадените числа достигнем до числа, измежду които има  $1$  нула и останалите са степени на двойката, можем да достигнем до еднакви числа, които са равни на най-голямата степен на двойката от тях. Ще докажем по индукция, че при  $n = 2^k + s, 0 < s \leq 2^k$  можем да получим всички числа да са равни на  $2^t$  за всяко  $t \geq k$ .

Нека  $n = 3$ . Понеже  $(1, 2, 3) \rightarrow (2, 2, 4) \rightarrow (0, 4, 4)$  имаме база за индукцията. Приемаме, че  $n = 2^k + s, 0 \leq s < 2^k$ . Случаят  $s = 0$  се свежда до  $n = 2^k - 1$ . Ако  $s > 0$  прилагаме операцията към двойките  $(2^k - 1, 2^k + 1), (2^k - 2, 2^k + 2), \dots, (2^k - s, 2^k + s)$  и получаваме  $2, 4, \dots, 2s$  и  $s$  пъти  $2^{k+1}$ . Числото  $2^k$  не променяме и остават още  $1, 2, \dots, 2^k - s - 1$ . За последните прилагаме индукционното предположение, а също така и за числата  $2, 4, \dots, 2s$ . За да бъде решението окончателно ще разгледаме още случая  $s = 1$  или  $s = 2$ . Но тогава остават числата  $2$  или  $2$  и  $4$ , които са степени на двойката. Ако  $2^k - s - 1 = 1$  или  $2^k - s - 1 = 2$ , то ще останат само числата  $1$  или  $2$ . Продължаваме например така:  $(1, 2, 4) \rightarrow (1, 3, 4) \rightarrow (2, 4, 4) \rightarrow (0, 2, 8)$ . Следователно така можем да достигнем до числото  $2^{k+1}$  и всички по-високи степени.

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за наблюдението, че числото, което остава може да бъде само степен на  $2$ ; 1 т. за  $(0, a) \rightarrow (0, 2a)$ ; 1 т. за наблюдението, че ако има  $0$  и всички останали числа са степени на  $2$ , можем да достигнем до равни числа; 1 т. за  $(1, 2, 3) \rightarrow (0, 4, 4)$ ; 2 т. за индукцията; 1 т. за  $(1, 2, 4) \rightarrow (0, 2, 8)$ .

**Задача 9.1.** Да се намерят всички стойности на реалния параметър  $a$ , за които уравнението

$$\frac{a+2}{x-2} + \frac{a+3}{x-3} = \frac{a+5}{x-5}$$

има точно едно решение.

**Решение.** Уравнението има смисъл за  $x \notin \{2, 3, 5\}$ . След освобождаване от знаменател и опростяване получаваме квадратното уравнение

$$ax^2 - 2x(5a + 6) + 19a + 30 = 0.$$

При  $a = 0$  разглежданото уравнение има единствено решение  $x = 5/2$ . Нека  $a \neq 0$ . Дискриминантата  $24(a^2 + 5a + 6)$  е равна на  $0$  при  $a = -2$  и  $a = -3$ , но в тези случаи решенията са съответно  $x = 2$  и  $x = 3$ , които не са в дефиниционното множество. Решение  $x = 5$

на квадратното уравнение се получава при  $a = -5$ , което дава и  $x = 13/5$ . Следователно търсените стойности са  $a = 0$  и  $a = -5$ .

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за получаване на квадратното уравнение, 1 т. за случая  $a = 0$ , 2 т. за разглеждане и отхвърляне на случаите на нулева дискриминанта, 2 т. за намиране и разглеждане на случая  $a = -5$ .

**Задача 9.2.** Върху страната  $AB$  на триъгълник  $ABC$  са построени точки  $D$  и  $E$ , а върху страната  $AC$  – точка  $F$ , така че  $AD = AC$ ,  $BE = BC$  и  $AF = AE$ . Ако  $\sphericalangle ACB = 3^\circ$ .  $\sphericalangle EFD$ , намерете градусната мярка на  $\sphericalangle ACB$ .

**Решение.** От  $AF = AE$  и  $AD = AC$  следва, че  $EDCF$  е равнобедрен трапец и следователно е вписан в окръжност. Тогава

$$\begin{aligned}\sphericalangle EFD &= \sphericalangle ECD = 180^\circ - \sphericalangle ADC - \sphericalangle BEC = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle A - 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle B = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle ACB.\end{aligned}$$

Получаваме  $\sphericalangle ACB = 3^\circ$ .  $\sphericalangle EFD = 270^\circ - \frac{3}{2} \sphericalangle ACB$ , така че  $\frac{5}{2} \sphericalangle ACB = 270^\circ$  и  $\frac{5}{2} \sphericalangle ACB = 108^\circ$ .

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за доказване, че  $EDCF$  е вписан; 3 т. за доказване, че  $\sphericalangle EFD = 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle ACB$ ; 2 т. за довършване.

**Задача 9.3.** Да се докаже, че уравнението  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = n + \sqrt{x+y}$ , където  $n$  е естествено число, има решение в естествени числа  $x$  и  $y$  тогава и само тогава, когато  $n$  е четно число.

**Решение.** *Първи начин.* След двукратно повдигане на квадрат получаваме

$$4xy = n^2(n^2 + 4(x+y) + 4n\sqrt{x+y}).$$

Оттук следва, че  $x+y$  е точен квадрат, след което е очевидно, че при нечетно  $n$  двете страни са от различна четност, т.е. уравнението няма решение.

Нека  $n = 2k$  и  $x+y = m^2$ , където  $k$  и  $m$  са естествени числа. Получаваме уравнението  $xy = 4k^2(k+m)^2$ , което има решение  $x = 9k^2$ ,  $y = 16k^2$ .

*Втори начин.* Както по-горе се вижда, че  $x+y$  е точен квадрат, а тогава от повдигане в квадрат на  $\sqrt{x} = n + \sqrt{x+y} - \sqrt{y}$  следва, че и  $y$  е точен квадрат. Аналогично заключаваме, че и  $x$  е точен квадрат. Тогава  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt{y}$  и  $\sqrt{x+y}$  е питагорова тройка. Нека  $\sqrt{x} = u^2 - v^2$ ,  $\sqrt{y} = 2uv$  и  $\sqrt{x+y} = u^2 + v^2$ . От уравнението получаваме  $u = v + \frac{n}{2v}$ , откъдето се вижда, че нямаме решение при нечетно  $n$ . При четно  $n$  решение се получава за всяко  $v$ , за което  $2v$  е делител на  $n$ .

**Оценяване.** (7 точки) 2 т. извода, че  $x+y$  е точен квадрат, 2 т. за доказване, че уравнението няма решение при нечетно  $n$ , 3 т. за посочване на решение при четно  $n$ .

**Задача 9.4.** Дадено е естествено число  $n$ . Върху две успоредни прави са отбелязани общо  $n$  точки и са построени всички отсечки с краища в тези точки. Нека  $a_n$  е максималният брой области, на които може да се е разпаднала ивицата между двете прави (например  $a_2 = 2$ ).

а) Пресметнете  $a_{10}$  и  $a_{41}$ .

б) Докажете, че съществува просто число  $p$ , което не дели никое  $a_n$ , и намерете най-малкото такова  $p$ .

**Решение.** Нека в конфигурацията с максимален брой области на едната права има  $x$  точки, а на другата  $y = n - x$  и  $x \geq y$ . Явно в тази конфигурация никои три отсечки не минават през една точка. Отначало ивицата е една област. Ако при построяването на дадена отсечка тя пресече  $z$  предишни, то тя се разпада на  $z + 1$  отсечки, всяка от които дели някаква област, така че броят на областите нараства със  $z + 1$ . Сумирайки по всички построени отсечки, заключаваме, че броят на областите е с 1 повече от сбора на броя отсечки (който е  $xy$ ) и броя на пресечни точки на отсечки. Всяка пресечна точка се обуславя от двойка точки по едната права и двойка точки по другата, т.е. броят им е  $\frac{1}{4}x(x-1)y(y-1)$ . Получаваме, че  $a_n = 1 + xy + \frac{1}{4}x(x-1)y(y-1)$ .

Да допуснем, че  $x - y \geq 2$ . Да разгледаме конфигурация с  $x - 1$  точки на едната права и  $y + 1$  на другата. От максималността следва

$$xy + \frac{1}{4}x(x-1)y(y-1) \geq (x-1)(y+1) + \frac{1}{4}(x-1)(x-2)(y+1)y$$

$$0 \geq x - y - 1 + \frac{1}{4}(x-1)y(x-2y-2+x) \geq 2 - 1 + \frac{1}{4}(x-1)y(2.2-2) \geq 0,$$

което е противоречие. Така в максималната конфигурация броят на точките върху двете прави се различава най-много с 1. Следователно:

- ако  $n = 2k$ , то  $x = y = k$  и  $a_n = 1 + k^2 + \frac{1}{4}k^2(k-1)^2 = \frac{1}{4}(k^4 - 2k^3 + 5k^2 + 4)$ .

- ако  $n = 2k + 1$ , то  $x = k + 1$ ,  $y = k$  и  $a_n = 1 + (k+1)k + \frac{1}{4}k^2(k^2-1) = \frac{1}{4}(k^4 + 3k^2 + 4k + 4)$ .

а) Имаме  $a_{10} = \frac{1}{4}(5^4 - 2 \cdot 5^3 + 5^2) + 1 = 126$  и  $a_{41} = \frac{1}{4}(20^4 + 3 \cdot 20^2) + 20 + 1 = 40321$ .

б) Имаме  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 3$ ,  $a_5 = 10$ ,  $a_{10} = 126$ , сред които има кратни на първите 4 прости числа. За да покажем, че  $p = 11$  е търсеното число, разглеждаме остатъците при деление на 11 и се уверяваме, че числителите не се делят на 11, така че и  $a_n$  не се дели на 11:

|                         |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |    |
|-------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|---|----|
| $k$                     | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9 | 10 |
| $k^2$                   | 0 | 1 | 4 | 9 | 5 | 3 | 3 | 5 | 9  | 4 | 1  |
| $k^3$                   | 0 | 1 | 8 | 5 | 9 | 4 | 7 | 2 | 6  | 3 | 10 |
| $k^4$                   | 0 | 1 | 5 | 4 | 3 | 9 | 9 | 3 | 4  | 5 | 1  |
| $k^4 - 2k^3 + 5k^2 + 4$ | 4 | 1 | 1 | 8 | 6 | 3 | 9 | 3 | 10 | 2 | 8  |
| $k^4 + 3k^2 + 4k + 4$   | 4 | 1 | 7 | 3 | 5 | 9 | 2 | 6 | 1  | 2 | 4  |

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за  $a_n = 1 + xy + \frac{1}{4}x(x-1)y(y-1)$ ; 1 т. за доказване, че броят на точките по двете линии се различава с 0 или 1; 1 т. за извеждане на формулите за  $a_k$  и  $a_{k+1}$ ; 1 т. за  $a_{10} = 126$ ; 1 т. за  $a_{41} = 40321$ ; 1 т. за доказване, че  $p > 7$ ; 1 т. за доказване, че  $p = 11$ .

**Задача 10.1.** Да се реши уравнението

$$\frac{3x}{\sqrt{2 - |1 - 2x|}} = 1.$$

**Решение.** Първо забелязваме, че ако даденото уравнение има решение, то е положително число, т.е.  $x > 0$ . Така след привеждане под общ знаменател и повдигане на квадрат достига

до еквивалентното уравнение.

$$9x^2 = 2 - |1 - 2x|, \text{ където } x > 0.$$

*Случай 1.* Ако  $1 - 2x \geq 0$ , т.е.  $x \leq \frac{1}{2}$ , то получаваме  $9x^2 - 2x - 1 = 0$  с корени  $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{9}$ , но само  $\frac{1 + \sqrt{10}}{9}$  е в интервала  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ .

*Случай 2.* Ако  $1 - 2x < 0$ , т.е.  $x > \frac{1}{2}$ , то получаваме  $9x^2 + 2x - 3 = 0$  с корени  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{7}}{9}$ , но нито един от тях не е в интервала  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right]$ .

Така окончателно получаваме, че задачата има единствено решение  $x = \frac{1 + \sqrt{10}}{9}$ .

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за  $x > 0$  и свеждането до еквивалентно уравнение без радикал; 2 т. за случай 1.; 2 т. за случай 2.

**Задача 10.2.** Да се определят стойностите на параметъра  $a$ , за които уравнението

$$x^3 - ax^2 + (a - 1)^2 = 0,$$

има най-много едно положително решение.

**Решение.** Забелязваме, че  $x = a - 1$  е корен на уравнението и го записваме във вида

$$(x - a + 1)(x^2 - x - a + 1) = 0.$$

Нека  $f(x) = x^2 - x - a + 1$  и  $D = 1 - 4(-a + 1) = 4a - 3$ .

*Случай 1.* Ако  $D \leq 0$ , т.е.  $a \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$ , то  $f(x) = 0$  има най-много едно решение  $x = \frac{1}{2}$  и даденото уравнение има едно отрицателно решение  $x = a - 1$  и едно положително решение  $x = \frac{1}{2}$  при  $a = \frac{3}{4}$ .

*Случай 2.* Ако  $D > 0$ , тъй като  $\frac{1}{2} > 0$ , то  $f(x) = 0$  има поне едно положително решение и за да е единствено е необходимо  $f(0) = -a + 1 \leq 0$ . В същото време,  $x = a - 1 \geq 0$  е решение на уравнението, което ако е положително е необходимо да съвпада с положителното решение на  $f(x) = 0$ . Така достигахме до извода, че  $a = 1$  или  $f(a - 1) = 0$ , т.е.  $a = 1$  или  $a = 3$ , когато получаваме съответните решения  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  и  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$ .

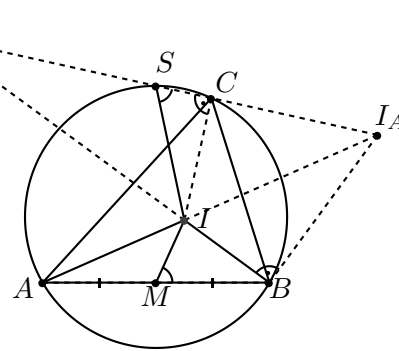
Окончателно  $a \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right] \cup \{1\} \cup \{3\}$ .

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за разлагането  $(x + a + 1)(x^2 - x + a + 1) = 0$ ; 2 т. за случай 1.; 2 т. за случай 2.

**Задача 10.3.** Даден е  $\triangle ABC$ , който е вписан в окръжност  $k$ . Нека  $I$  е центъра на вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност,  $M$  е средата на страната  $AB$ , а  $S$  е средата на дъгата  $\widehat{ACB}$ . Да се намери  $\sphericalangle ACB$ , ако  $IS = 2IM$ .

**Решение.** Ще използваме стандартните означения за ъглите в триъгълник. Тъй като  $S$  е среда на  $\widehat{ACB}$ , то  $\sphericalangle ICS = \sphericalangle ICA + \sphericalangle ACS = \frac{\gamma}{2} + (90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = 90^\circ$  и следователно правата  $CS$  е външна ъглополовяща за  $\sphericalangle ACB$ . Тогава пресечните точки  $I_A$  и  $I_B$  на правите  $AI$  и  $BI$  с правата  $CS$  са центровете на външновписаните окръжности за  $\triangle ABC$  към страните  $BC$  и  $AC$  съответно.

От  $\sphericalangle I_A I_B I = \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle IAB$  и  $\sphericalangle I_B I_A I = \frac{\beta}{2} = \sphericalangle IBA$  следва, че  $\triangle I I_B I_A \sim \triangle IAB$ . Освен това  $\sphericalangle BSC = \alpha = 2\sphericalangle SI_B B$ , т.е.  $S$  е среда на хипотенузата в правоъгълния триъгълник  $I_A I_B B$ .



Следователно  $IS$  и  $IM$  са съответни медиани в подобни триъгълници. Но по условие  $IS = 2IM$ , т.е.  $II_A = 2IB$ , откъдето получаваме  $\sphericalangle II_A B = \frac{\gamma}{2} = 30^\circ$  и следователно  $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ .

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за доказателство, че  $CS$  е външна ъглополовяща; 1 т. за построяване на точките  $I_A$  и  $I_B$ ; 1 т. за  $\triangle I I_B I_A \sim \triangle IAB$ ; 1 т. за  $S$  - среда на  $I_A I_B$ ; 3 т. за  $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ .

**Задача 10.4.** Дадени са естествените числа  $a$  и  $b$ . На черната дъска се записват четирите числа

$$X = a, Y = b, U = a, V = b.$$

Докато е възможно, с тези числа извършваме следното преобразуване:

- ако  $X > Y$ ,  $X$  и  $U$  се изтриват и на тяхно място се записват съответно  $X - Y$  и  $U + Y$ ;
- ако  $X < Y$ ,  $Y$  и  $V$  се изтриват и на тяхно място се записват съответно  $Y - X$  и  $U + V$ ;

След всяко преобразуване четирите числа отново се означават с  $X, Y, U$  и  $V$  в посочения ред. Процесът спира, ако  $X = Y$ . Да се докаже, че процесът спира при всеки първоначален избор на числата  $a$  и  $b$  и да се намери  $U + V$  в крайния момент.

**Решение.** Очевидно  $X + Y$  намалява строго и  $X + Y > 0$ , следователно процесът ще спре след краен брой стъпки. Най-големият общ делител на  $X$  и  $Y$  е инварианта (защо?) и следователно процесът ще спре при  $X = Y = (a, b)$ . От друга страна,  $XV + YU = 2ab$  също е инварианта (защо?), откъдето получаваме, че в крайния момент имаме

$$2ab = XV + YU = (a, b)(U + V),$$

но  $ab = (a, b)[a, b]$  и следователно  $U + V = 2[a, b]$ .

**Оценяване.** 1 т. за аргументация, че процесът е краен; 1 т. за намиране на инварианта  $(X, Y)$ ; 3 т. за намиране на инварианта  $XV + YU$ ; 2 т. за довършване на решението.

**Задача 11.1.** Дадена е аритметична прогресия с 2025 члена, първи член  $a_1 = 1$  и разлика  $d \neq 0$ . Известно е, че съществува естествено число  $n$ ,  $1 < n < 2025$ , за което  $a_1, a_n$  и  $a_{2025}$  в този ред образуват геометрична прогресия с частно  $q = d + n - 1$ . Колко различни стойности може да приема разликата  $d$ ?

**Решение.** От  $n = qa_1$  намираме  $1 + (n-1)d = d + n - 1$ , откъдето  $(n-2)(d-1) = 0$ . При  $d = 1$  имаме  $a_{2025} = 2025$ ,  $q = n$  и от  $a_{2025} = q^2 \cdot a_1 = n^2$  намираме  $n^2 = 2025$ , т.е.  $n = 45$ . При  $n = 2$  имаме  $q = d + 1$  и от  $a_{2025} = q^2 \cdot a_1 = q^2$  получаваме  $(1+d)^2 = 1 + 2024d$ , откъдето  $d = 2022$ . Следователно  $d$  може да приема две стойности.

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за намиране  $n = 2$  или  $d = 1$ ; 2 т. за случая  $n = 2$ ; 2 т. за случая  $d = 1$ .

**Задача 11.2.** Да се намерят всички естествени числа  $n$ , за които числото  $n+1$  има само един прост делител и  $(n-1)! + n! + (n+1)!$  не дели  $(n!)^2$ . (За естествено число  $m$  с  $m!$  означаваме числото  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m$ )

**Решение.** Имаме  $(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)!(n+1)^2$  и ако това число дели  $(n!)^2$ , то  $(n+1)^2$  дели  $(n!) \cdot n$ . Понеже  $n+1$  и  $n$  са взаимнопрости, то  $(n+1)^2$  дели  $(n-1)!$ . Нека  $n+1 = p^\alpha$ . Ако  $\alpha = 1$ , то  $p$  не дели  $(p-2)!$  и следователно всички числа от вида  $n = p-1$  са измежду търсените. Нека  $\alpha \geq 2$ . Тогава числата  $p, 2p, \dots, (p^{\alpha-1}-1)p$  са по-малки от  $p-1$  и се делят на  $p$ . Оттук следва, че степента на  $p$ , която дели  $(p-1)!$  е поне  $p^{\alpha-1}-1$ . Ако  $2\alpha \leq p^{\alpha-1}-1$ , то  $p^\alpha$  ще дели  $(p-2)!$ , откъдето получаваме  $2\alpha > p^{\alpha-1}-1$ . Ако  $p \geq 5$ , то  $2\alpha > 5^{\alpha-1}-1$ , което не е вярно (доказва се по индукция) за никое  $\alpha \geq 2$ . Ако  $p = 3$  неравенството  $2\alpha > 3^{\alpha-1}-1$  е изпълнено само за  $\alpha = 2$ , а при  $p = 2$  неравенството  $2\alpha > 2^{\alpha-1}-1$  е изпълнено само при  $\alpha = 2, 3, 4$ . Директна проверка за  $p^\alpha = 9, 4, 8, 16$  показва, че при  $\alpha \geq 2$  търсените стойности за  $p^\alpha$  са 4, 8 и 9.

Следователно естествените числа  $n$ , които удовлетворяват условието, са числата от вида  $p-1$ , където  $p$  е просто число и 3, 7, 8.

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за наблюдението, че  $p-1$  за  $p$  просто число е решение; 1 т. за наблюдението, че  $(n+1)^2$  дели  $(n-1)!$ ; 1 т. за неравенството  $2\alpha > p^{\alpha-1}-1$ ; по 1 т. за всеки от случаите  $p = 2, 3$  и  $p \geq 5$ .

**Задача 11.3.** В остроъгълен триъгълник  $ABC$  е построена окръжност  $\Omega$ , която минава през точка  $A$  и е с център върху височината  $AH$ ,  $H \in BC$ . Пресечните точки на  $\Omega$  с отсечките  $AB$  и  $AC$  са означени с  $P$  и  $Q$ , като  $AP^2 = AQ \cdot CQ$ . Точка  $K$  от описаната около триъгълник  $OBC$  окръжност, където точка  $O$  е центърът на описаната около  $\triangle ABC$  окръжност, лежи в една и съща полуравнина с точка  $A$  спрямо правата  $BC$  и  $\sphericalangle BKA = \sphericalangle CKA$ . Да се докаже, че точката  $K$  лежи на  $\Omega$ .

**Решение.** Ако  $S$  е центърът на  $\Omega$ , то  $\sphericalangle SAB = 90^\circ - \beta$ , откъдето  $\sphericalangle AQP = \beta$ . Следователно  $\triangle ABC \sim \triangle AQP$  и  $\frac{AB}{AC} = \frac{AQ}{AP}$ . От  $AP^2 = CQ \cdot AQ$  намираме  $\frac{AQ}{AP} = \frac{AP}{CQ}$ , откъдето

$$(1) \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AP}{CQ}.$$

Понеже  $\sphericalangle BKC = \sphericalangle BOC = 2\alpha$ , то  $\sphericalangle AKB = \sphericalangle AKC = 180^\circ - \alpha$ . Тогава  $\sphericalangle BAK + \sphericalangle ABK = \alpha$ , откъдето  $\sphericalangle ABK = \sphericalangle CAK$ . Следователно  $\triangle ABK \sim \triangle CAK$  и получаваме  $\frac{AB}{AC} = \frac{AK}{CK}$ . От това равенство, заедно с (1) намираме  $\frac{AP}{CQ} = \frac{AK}{CK}$ , което означава, че  $\triangle APK \sim \triangle CQK$ . Оттук  $\sphericalangle APK = \sphericalangle CQK$ , т.е. точките  $A, P, K, Q$  лежат на една окръжност.

**Оценяване.** (7 точки) 2 т. за  $\triangle ABC \sim \triangle AQP$ ; 2 т. за  $\triangle ABK \sim \triangle CAK$ ; 2 т. за  $\triangle APK \sim \triangle CQK$ ; 1 т. за довършване на решението.

**Задача 11.4.** Една редица  $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_{2015}$  от нули и единици се нарича *добра*, ако съществува единствена редица  $\mathbf{y} = y_1, y_2, \dots, y_{2015}$  от нули и единици, различна от  $\mathbf{x}$ , със следното свойство: всяка редица, получена от  $\mathbf{x}$  след изтриване на един неин член може да се получи с изтриване на един член на редицата  $\mathbf{y}$ . Да се намери броят на добрите редици.

**Решение.** Ако редицата  $\mathbf{x}$  е съставена само от нули (съответно единици), то всяка редица  $\mathbf{y}$ , съдържаща само една единица (съответно нула) има исканото в условието свойство. Следователно такава редица не е добра. Да забележим, че ако броят на символите 0 в редицата  $\mathbf{x}$  е по-малък от броя на символите 0 в редицата  $\mathbf{y}$ , то изтриването на една нула в  $\mathbf{x}$  ще доведе до редица, в която нулите са поне две по-малко от нулите в  $\mathbf{y}$  и такава редица не може да се получи с едно изтриване в  $\mathbf{y}$ . Следователно в  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  има равен брой нули и единици.

Да допуснем, че  $x_1 \neq y_1$  и нека за определеност  $x_1 = 0, y_1 = 1$ . Редицата, получена от  $\mathbf{x}$  след изтриване на произволен символ  $x_i$  за  $i \geq 2$  започва с 0 и следователно може да се получи от  $\mathbf{y}$  само с изтриване на  $y_1 = 1$ , като тогава трябва да имаме  $y_2 = 0$ . Това означава, че произволно изтриване на  $x_i$  за  $i \geq 2$  в редицата  $x_2, x_3, \dots, x_{2015}$  води до получаване на редицата  $y_3, \dots, y_{2015}$ . При изтриване на  $x_i$  за  $i = 2, 3, \dots, 2014$  имаме  $x_{i+1} = y_{i+1}$ , а при изтриване на  $x_{i+1}$  имаме  $x_i = y_{i+1}$ . Следователно  $x_i = x_{i+1}$ , откъдето получаваме  $x_2 = x_3 = x_4 = \dots = x_{2015}$ . Ако  $x_2 = 0$ , то всички членове на  $\mathbf{x}$  са нули и тогава всяка редица само с една единица може да се избере за  $\mathbf{y}$ . Следователно  $x_2 = 1, \mathbf{x} = 0, 1, 1, \dots, 1$  и  $\mathbf{y} = 1, 0, 1, 1, \dots, 1$ .

Нека сега  $x_1 = y_1$  и за определеност нека  $x_1 = y_1 = 0$ . Тогава за някое  $k$ , за което  $1 \leq k \leq 2014$  имаме  $x_1 = \dots = x_k \neq x_{k+1} = 1$  и да допуснем, че  $0 = y_1 = \dots = y_{k+1}$ . Изтриване на  $x_1$  води до редица, която започва с  $k - 1$  символа 0, а всяко изтриване на символ от  $\mathbf{y}$  води до редица, която започва с поне  $k$  символа 0, противоречие. Ако  $0 = y_1 = \dots = y_k \neq y_{k+1}$ , то изтриване на  $x_1$  води до изтриване на някое  $y_i$  за  $i = 1, 2, \dots, k$  и двете редици ще съвпадат, противоречие. Следователно  $0 = y_1 = \dots = y_t \neq y_{t+1} = 1$  за някое  $t < k$ . Всяко изтриване на  $x_i$  за  $i \geq k + 1$  води до изтриване на  $y_{t+1}$  и до  $y_{t+1} = 0$ . Както по-горе следва, че  $x_{k+1} = \dots = x_{2015} = y_{k+2} = \dots = y_{2015}$ . Понеже редицата  $\mathbf{x}$  не е съставена само от нули и в  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  има равен брой нули и единици, то  $\mathbf{x} = 0, 0, \dots, x_k = 0, x_{k+1} = 1, 1, 1, \dots, 1$  и  $\mathbf{y} = 0, 0, \dots, y_t = 0, y_{t+1} = 1, 0, 0, \dots, y_{k+2} = 1, 1, \dots, 1$ .

Ако  $k > t + 1$  изтриване на  $x_1 = 0$  води до изтриване на символ нула от редицата  $\mathbf{y}$ . Понеже  $k > t + 1$  след  $y_{t+1} = 1$  ще има поне една нула, противоречие. Следователно  $k = t + 1$  и  $\mathbf{x} = 0, 0, \dots, x_k = 0, x_{k+1} = 1, 1, 1, \dots, 1$  и  $\mathbf{y} = 0, 0, \dots, y_t = 0, y_k = 1, 0, y_{k+2} = 1, 1, \dots, 1$ .

Получихме, че всяка от търсените редици има вида  $\mathbf{x} = 0, 0, \dots, 0, 1, 1, 1, \dots, 1$  или  $\mathbf{x} = 1, 1, \dots, 1, 0, 0, 0, \dots, 0$ . Следователно добрите редици са  $2 \cdot 2014 = 4028$ .

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за случая, когато  $\mathbf{x}$  се състои само от нули или единици; 1 т. за наблюдението, че  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  имат равен брой нули и единици; 1 т. за верен отговор без доказателство; 2 т. за случая  $x_1 \neq y_1$ ; 2 т. за случая  $x_1 = y_1$ .



**Задача 12.1.** Нека  $a_0, a_1, \dots$  е такава редица от реални числа, че  $a_n - a_{n-1} \geq 1$  и  $a_{n+1} = n + \frac{1}{a_n - a_{n-1}}$  при  $n \geq 1$ . Да се докаже, че редицата с общ член  $a_n - n$  е сходяща и да се намери нейната граница.

**Решение.** За  $b_n = a_n - a_{n-1}$  ( $n \geq 1$ ) имаме, че

$$1 \leq b_{n+2} = 1 + \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n}.$$

Следователно  $b_n \geq b_{n+1} \geq 1$  и значи  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  съществува. Тогава  $l = 1 + \frac{1}{l} - \frac{1}{l}$ , т.е.  $l = 1$ , което е еквивалентно на  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - n) = 0$ .

**Оценяване.** (6 точки) 3 т. за  $b_n \geq b_{n+1}$  и 3 т. за довършване на решението.

**Задача 12.2.** Нека  $m_c$  и  $l_c$  са дължините на медианата и ъглополовящата през върха  $C$  на  $\triangle ABC$  с лице  $S$ . Ако  $\gamma = \angle BCA$ , да се докаже, че

$$m_c l_c \geq S \cot \frac{\gamma}{2}.$$

**Решение.** Имаме, че

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}, \quad l_c^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}((a+b)^2 - c^2),$$

$$S \cot \frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4}.$$

Тогава

$$m_c^2 l_c^2 - S^2 \cot^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{16(a+b)^2} (4ab((a+b)^2 + (a-b)^2 - c^2) - (a+b)^2((a+b)^2 - c^2))$$

$$= \frac{(a+b)^2 - c^2}{16(a+b)^2} (a-b)^2 (c^2 - (a-b)^2) = \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 S^2 \geq 0$$

**Забележка.**  $\sqrt{S \cot \frac{\gamma}{2}}$  е дължината на чевианата през върха  $C$ , която разделя  $\triangle ABC$  на два триъгълника с равни радиуси на вписаните окръжности.

**Оценяване.** (6 точки) 3 т. за свеждане до неравенство за  $a, b, c$  и 3 т. за довършване на решението.

**Задача 12.3.** Да се намерят всички двойки функции  $f, g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ , където  $\mathbb{N}_0$  е множеството на всички неотрицателни цели числа и:

$$(1) f(1) > f(0);$$

(2)  $f(g(n))$  е точно броят на целите неотрицателни числа  $k \leq n$ , за които  $f(k) \leq k$  и  $g(f(n))$  е точно броят на целите неотрицателни числа  $k \leq n$ , за които  $g(k) > k$ .

**Решение.** *Отговор:*  $f(n) = n, g(n) = n + 1$  са единствената двойка функции, решение на задачата. Лесна проверка показва, че те удовлетворяват поставените условия. Имаме, че  $f(g(0)) \leq 1$  и  $g(f(0)) \leq 1$ . Ще разгледаме 4 случая:

Случай 1:  $f(g(0)) = g(f(0)) = 0$

Тогава  $g(0) = 0$  и  $f(0) > 0$  от (2). Но  $0 = f(g(0)) = f(0)$ , противоречие.

Случай 2:  $f(g(0)) = g(f(0)) = 1$

Тогава  $g(0) > 0$  и  $f(0) = 0$  от (2). Но тогава  $1 = g(f(0)) = g(0)$ . С индукция по  $n$  ще докажем, че за всяко цяло неотрицателно число  $f(n) = n$  и  $g(n) = n + 1$ . Базата е доказана. Нека  $n$  е цяло неотрицателно число, за което твърдението е вярно. Тогава  $f(g(n)) = f(n + 1)$  е броят на числата по-малки или равни на  $n$ , за които  $f(k) \leq k$ , тоест  $n + 1$ . Тогава  $g(f(n + 1)) = g(n + 1)$  е броят на числата, по-малки или равни на  $n + 1$ , за които  $g(k) > k$ , като има поне  $n + 1$  такива числа. Тогава  $n + 1 \leq g(n + 1) \leq n + 2$ . Тогава ако  $g(n + 1) = n + 1$  имаме, че  $f(g(n + 1)) = n + 1$ , а всички цели неотрицателни числа по-малки или равни на  $n + 1$  удовлетворяват  $f(k) \leq k$ , противоречие. Следователно  $g(n + 1) = n + 2$ . Индукцията е завършена.

Случай 3:  $f(g(0)) = 1, g(f(0)) = 0$

Тогава  $g(0) = 0$  и  $f(0) = 0$  от (2). Но  $0 = f(g(0)) = f(0) = 0$ , противоречие.

Случай 4:  $f(g(0)) = 0, g(f(0)) = 1$

Тогава  $g(0) > 0$  и  $f(0) > 0$  от (2). Но  $0 = f(g(0)) = f(0) = 0$ . Имаме, че  $f(g(f(0))) = f(1)$  е всъщност броят на числата, по-малки или равни на  $f(0)$  такива, че  $f(k) \leq k$ , като 0 не е сред тях. Тогава  $f(1) \leq f(0)$ , противоречие с (1).

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за случай 1; 3 т. за случай 2; 1 т. за случай 3; 2 т. за случай 4.

**Задача 12.4.** Нека  $X, Y$  и  $Z$  са три различни точки от вътрешността на изпъкнал многоъгълник  $\Pi$ . Да се докаже, че  $f(X, Y)f(Y, Z) \geq f(X, Z)$ , където

$$f(X, Y) = \frac{r(X) + r(Y) + |XY|}{2\sqrt{r(X)r(Y)}},$$

а  $r(X)$  е радиусът на най-големия кръг в  $\Pi$  с център  $X$ .

**Решение.** Имаме, че  $f(X, Y)f(Y, Z) \geq f(X, Z) \Leftrightarrow$

$$(r(X) + r(Y) + |XY|)(r(Y) + r(Z) + |YZ|) \geq 2r(Y)(r(X) + r(Z) + |XZ|) \Leftrightarrow$$

$$(r(X) - r(Y) + |XY|)(r(Z) - r(Y) + |YZ|) + 2r(Y)(|XY| + |YZ| - |XZ|) \geq 0.$$

За всяка точка  $P$  от контура на  $\Pi$  е в сила  $r(Y) \leq |YP| \leq |XP| + |XY|$ . Можем да изберем  $P$  така, че  $|XP| = r(X)$  и тогава  $r(Y) \leq r(X) + |XY|$ . Аналогично  $r(Y) \leq r(Z) + |YZ|$  и понеже  $|XZ| \leq |XY| + |YZ|$ , следва, че  $f(X, Y)f(Y, Z) \geq f(X, Z)$ .

**Оценяване.** (7 точки) 2 т. за  $r(Y) - r(X) \leq |XY|$  и 5 т. за довършване на решението.

**Задачите са предложени от:** 8.1-8.4 – Иван Тонов, 9.1, 9.3 – Петър Бойваленов; 9.2, 9.4. – Ивайло Кортезов; 10.1 – Иван Ланджев; 10.2 – Стоян Боев; 10.3 – Стоян Боев; 10.4 – Иван Ланджев; 11.1 – Пламен Пенчев и Емил Колев; 11.2 – Емил Колев; 11.3 – Пламен Пенчев; 11.4 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.4 – Николай Николов; 12.3 – Любен Личев.